# МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

## НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

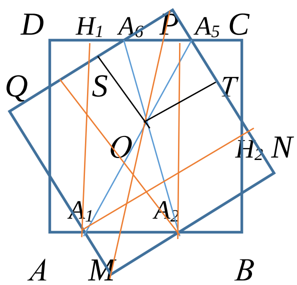
## НАЦИОНАЛЕН КРЪГ – 14 април 2018 г.

## ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ ЗА 7 КЛАС

**Задача 7.1.** Два еднакви квадрата $ABCD$ и $MNPQ$ са поставени един върху друг, така че общата им част да е осмоъгълник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$.

Да се докаже, че диагоналите на осмоъгълника $A_1A_5$ и $A_2A_6$ се пресичат върху диагонал на единия квадрат, а диагоналите на осмоъгълника $A_2A_6$ и $A_3A_7$ се пресичат върху диагонал на другия квадрат.

Решение. Нека двата еднакви квадрата да са със страна $1$.




Точката $A_1$ е на разстояние $1$ от рамената на ∡$DA_5N$ ($A_1H_1 = A_1H_2 = 1$) (2 т.) следователно $A_5A_1$ е ъглополовяща на ъгъла. По същите причини $A_6A_2$ е ъглополовяща за ∡$QPC$. (точката $A_2$ е на разстояние 1 от раменете на ∡$QA_6C$).( 1т.)

Нека точката $O$ е пресечна точка на двете ъглополовящи. Тогава точката $O$ е равно отдалечена раменете $PN$ u $PQ$ на ∡$QPN$ ($OT = OS$) и следователно точка лежи на ъглополовящата на ∡$QPN$, т.е. на диагонала $PM$ на квадрата $MNPQ$. (2 т.)

За $\Delta A_7DA_6$ двете му външни ъглополовящи $A_6A_2$ и $A_7A_3$ се пресичат с вътрешната ъглополовяща $DB$ в една точка. (2 т.)

**Задача 7.2.** Числата $a, b, c$ са рационални. Нека $m$ е най-малката стойност на израза

$$A = 4a^2 + 13b^2 + 10c^2 - 12ab + 12bc + 18c.$$

а) Намерете стойността на $m$.

б) Съществуват ли цели числа $a, b, c$, за които $A - m = 2019$?

в) Съществуват ли цели числа $a, b, c$, за които $A - m = 2018$?

Решение.

а) $A = (2a - 3b)^2 + (2b + 3c)^2 + (c + 9)^2 - 81 \geq -81$, като равенство се достига при $c = -9$, $b = 13{,}5$, $a = 20{,}25$, така че $m = -81$. (1 т.)

б) Числото 2019 при деление на 4 има остатък 3, а точните квадрати имат остатък 0 или 1 при деление на 4. (2 т.)

Следователно и трите точни квадрати трябва да са нечетни числа, т.е. да имат остатък 1 при деление на 4. Следователно числото $c$ е нечетно заради втория квадрат и същото число $c$ е четно, заради третия квадрат. Противоречие. (1 т.)

в) Имаме $A - m = (2a - 3b)^2 + (2b + 3c)^2 + (c + 9)^2$.

Ако представянето е възможно, то най-големият от трите точни квадрата е число в интервала $[26; 44]$. Анализирайки тези случаи можем да намерим (достатъчен е един пример)

$2018 = 33^2 + 23^2 + 20^2$ ,

$2018 = 35^2 + 28^2 + 3^2$,

$2018 = 35^2 + 27^2 + 8^2$,

$2018 = 41^2 + 16^2 + 9^2$,

$2018 = 43^2 + 12^2 + 5^2$,

$2018 = 44^2 + 9^2 + 1^2$. (2 т.)

Вторият и третият квадрати са с различна четност, така че първият квадрат е нечетно число. Достатъчно е да намерим само едно решение от посочените по-долу:

$a = 9, b = -5, c = 11;$

$a = 40, b = 15, c = -1;$

$a = 42, b = 19, c = -1;$

$a = -23, b = -27, c = 19;$

$a = -15, b = -11, c = 19.$ (1 т.)

**Задача 7.3.** Една фирма може да завърши месеца, както с положително *месечно салдо* (месечно салдо е разликата между приход и разход на фирмата за месеца), така и с отрицателно месечно салдо. Опитен счетоводител прави отчетите на фирмата така, че на всеки седем последователни месеца сумата от седемте месечни салда да е отрицателно число, а за всеки единадесет последователни месеца сумата от единадесетте месечни салда да е положително число.

а) Може ли счетоводителят да направи такива отчети в продължение на седемнадесет поредни месеца?

б) Можете ли да направите такъв отчет в продължение на шестнадесет последователни месеца?

*Решение.*

а) Допускаме, че е възможно да има такъв отчет за седемнадесет поредни месеца и означаваме с $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{16}, a_{17}$ месечните салда за тези 17 месеца.

Правим таблица

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ | $a_9$ | $a_{10}$ | $a_{11}$ | + |
| $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ | $a_9$ | $a_{10}$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | + |
| $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ | $a_9$ | $a_{10}$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | + |
| $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ | $a_9$ | $a_{10}$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | $a_{14}$ | + |
| $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ | $a_9$ | $a_{10}$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | $a_{14}$ | $a_{15}$ | + |
| $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ | $a_9$ | $a_{10}$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | $a_{14}$ | $a_{15}$ | $a_{16}$ | + |
| $a_7$ | $a_8$ | $a_9$ | $a_{10}$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | $a_{14}$ | $a_{15}$ | $a_{16}$ | $a_{17}$ | + |
| - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | ? |

Ако сумираме по редове ще получим, че сумата на всички числа в таблицата е положителна, а ако сумираме по стълбове ще получим, че сумата на всички числа в таблицата е отрицателна. (4 т.)

Това е в противоречие с допускането, че е възможно да се направи такъв отчет в продължение на 17 поредни месеца.

б) Нека положителните салда са $x$ лв., а отрицателните салда са $(-y)$ лв.

Тогава

$5x - 2y < 0$

$8x - 3y > 0,$ т.е. $\frac{3y}{8} < x < \frac{2y}{5}.$

Очевидно при $y = 13$ получаваме: $\frac{39}{8} < 5 < \frac{25}{5}$ и $x = 5$. (1 т.)

Разбира се при $y = 80$ получаваме неравенствата: $30 < 31 < 32$ и друго решение $x = 31$.

Едно решение е достатъчно.

Ето примерен отчет за 16 поредни месеца в хиляди лева.

5, 5, -13, 5, 5, 5, -13, 5, 5, -13, 5, 5, 5, -13, 5, 5. (2 т.)

Ако ученикът предложи направо примерен отчет за 16 месеца, без да обяснява как го е получил получава (3 т.)