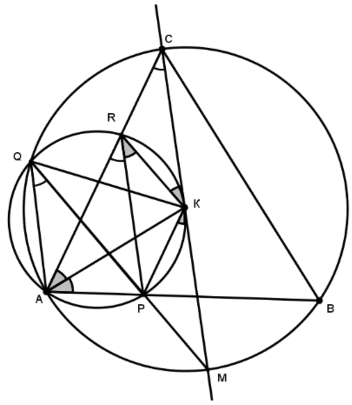
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
НАЦИОНАЛЕН КРЪГ – 14 април 2018 г.

ТЕМА ЗА VIII К Л А С

ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ

Задача 8.1. Върховете на $\triangle ABC$ лежат върху окръжността k. Точката K е вътрешна за триъгълника и лежи на ъглополовящата на $\sphericalangle BAC$. Правата CK пресича за втори път окръжността k в точка M. Окръжност k_1 минава през върха A, допира се до MC в точка K, пресича отсечката AB за втори път в точка P и окръжността k в точка Q. Ако $\sphericalangle ACQ = 20°$ и $\sphericalangle BCM = 30°$, намерете градусната мярка на $\sphericalangle AKQ$.



Решение:
Нека k_1 пресича отсечката AC за втори път в точка R.
$\sphericalangle PAK = \sphericalangle KAC = \sphericalangle PKM = \sphericalangle RKC = \sphericalangle KRP \Rightarrow RP \parallel CM$ (2т.)

$$\Rightarrow \sphericalangle MCA = \sphericalangle ARP = \sphericalangle AQP = \sphericalangle AQM \Rightarrow$$

P,Q и M лежат на една права (4т.). Сега (1т.)

$$\sphericalangle AKQ = \sphericalangle APQ = \sphericalangle AMQ + \sphericalangle MAB = \sphericalangle ACQ + \sphericalangle MCB = 50°.$$

Задача 8.2. Числата a, b, c са неотрицателни и имат сбор 3. Намерете най-малката възможна стойност на израза $\frac{2a+1}{a^2+3}+\frac{2b+1}{b^2+3}+\frac{2c+1}{c^2+3}$.

Решение. Ще покажем, че ако $x \in [0;3]$, то $\frac{2x+1}{x^2+3} \geq \frac{1}{12}(x+4)$. Наистина, последното е еквивалентно на $24x+12 \geq x^3+4x^2+3x+12$, а то на $0 \geq x(x+7)(x-3)$, което е вярно в посочения интервал (2т.). Сумирайки тези неравенства за $x = a, b, c$, получаваме

$$\frac{2a+1}{a^2+3}+\frac{2b+1}{b^2+3}+\frac{2c+1}{c^2+3} \geq \frac{1}{12}(a+b+c+12) = \frac{1}{12}(3+12) = \frac{5}{4}. \text{ (4т.)}$$

Ако някоя от променливите е равна на 3, а останалите – на 0, имаме равенство, така че търсената най-малка стойност е $\frac{5}{4}$. (1т.)

Задача 8.3. В редица са записани числата $a_1, a_2, a_3, ..., a_8$. Отначало $a_k = (-1)^k$ за всяко $k = 1, 2, \ldots, 8$. За един ход се избира някое k и тези от числата a_{k-1} и a_{k+1}, които съществуват, се заменят съответно с $a_{k-1}a_k$ и $a_k a_{k+1}$. Ще казваме, че една редица е постижима, ако може да се получи от началната с краен брой ходове. Колко са всички постижими редици?

Решение. Нека числата $b_1, b_2, b_3, ..., b_9$ отначало са дефинирани така: $b_1 = 1$, $b_2 = b_3 = -1$, $b_4 = b_5 = 1$, $b_6 = b_7 = -1$, $b_8 = b_9 = 1$. По този начин $b_k b_{k+1} = a_k$ за всяко $k = 1, 2, \ldots, 8$. Ако е извършен ход с $a_k = 1$, не се променя нищо. Ако е извършен ход с $a_k = -1$ (т.е. $b_k = -b_{k+1}$), нека в редицата $b_1, b_2, b_3, ..., b_9$ разменим стойностите на b_k и b_{k+1}. След размяната отново

$b_k b_{k+1} = a_k$ за всяко $k = 1, 2, \ldots, 8$. По този начин на всяка постижима редица съответства редица $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_9$, в която точно 4 от числата са равни на –1, а останалите – на 1 и $b_k b_{k+1} = a_k$ за всяко $k = 1, 2, \ldots, 8$ (2т.). Всяка редица от 4 „–1" и 5 „1" може да се получи от всяка друга такава с помощта на размени на съседни числа, така че съответстващата ѝ редица $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_8$ е постижима (1т.). Равенствата $b_k b_{k+1} = a_k$ определят еднозначно b_2, $b_3, \ldots, b_9$, ако се знаят $b_1, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_8$. Следователно всяка постижима редица съответства на две редици $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_9$, едната от които е получена според горните правила (така че има 4 „–1" и 5 „1"), а в другата всички числа са заменени с противоположните им (т.е. има 4 „1" и 5 „–1") (2т.). И така, броят на достижимите редици $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_8$ е равен на броя на редиците $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_9$, съдържащи 4 „–1" и 5 „1", който е $9! : (5!.4!) = 126$ (2т.).