Р Е П У Б Л И К А   Б Ъ Л Г А Р И Я

М И Н И С Т Е Р С Т В О   Н А   О Б Р А З О В А Н И Е Т О   И   Н А У К А Т А

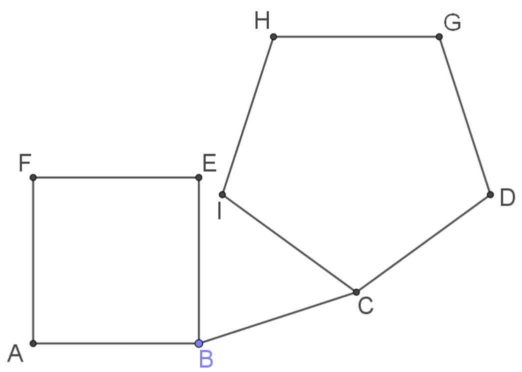
НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

НАЦИОНАЛЕН КРЪГ – 13 април 2019 г.

Т Е М А   ЗА   VII   К Л А С

7.1. Точките A, B, C, D са последователни върхове на правилен двадесетоъгълник. Вътрешно за двадесетоъгълника са построени квадратът $ABEF$ и правилният петоъгълник $CDGHI$. Докажете, че E лежи на правата CI.

Решение. Ще докажем, че $\measuredangle BCI = \measuredangle BCE$, с което задачата ще бъде решена.



Чертеж **1 точка**

Първо намираме $\measuredangle DCI$. Прекарваме диагоналите на петоъгълника през C. Сборът от ъглите на $CDGHI$ е равен на сбора от ъглите на триъгълниците CEH, CHG и CGD, значи е $3 \cdot 180° = 540°$. Тогава $\measuredangle DCI = 540° : 5 = 108°$. **1 точка**

Сега ще пресметнем $\measuredangle ABC$. Прекарваме всички диагонали на двадесетоъгълника през A. Те разделят двадесетоъгълника на 18 триъгълника. Сборът от ъглите на двадесетоъгълника е равен на сбора от ъглите на тези триъгълници, значи е $18 \cdot 180° = 3240°$.

Тогава $\measuredangle ABC = 3240° : 20 = 162°$. **2 точки**

Оттук намираме $\measuredangle BCI = \measuredangle BCD - \measuredangle DCI = \measuredangle ABC - \measuredangle DCI = 162° - 108° = 54°$.

Също така $\measuredangle CBE = \measuredangle ABC - \measuredangle ABE = 162° - 90° = 72°$. **2 точки**

По-нататък, тъй като страната на квадрата е равна на страната на двадесетоъгълника, имаме $BE = BC$, т.е. триъгълникът BCE е равнобедрен. Следователно

$\measuredangle BCE = \frac{1}{2}(180° - \measuredangle CBE) = \frac{1}{2}(180° - 72°) = 54°$, с което задачата е решена. **1 точка**

7.2. На всеки километър по магистралата, ако пътуваме от Я до Б, между двете ленти за движение има табела, на която от едната страна пише колко километра ни остават до Б, а от другата страна на табелата пише колко километра сме изминали от Я. Сумата от цифрите на числата, написани от двете страни на всяка табела, е равна на 17. Намерете колко километра е разстоянието по магистралата между Я и Б.

Решение. Разстоянието ЯБ по магистралата е по-малко от 100 км. Наистина, в противен случай на табелата, стояща на 89-я километър, ще пише 89 (от едната страна) и още някакво число (от другата страна). Сумата на цифрите на такава табела би била по-голяма от 17 – противоречие. Така получихме, че разстоянието е не по-голямо от 89 км. **2 точки**

Разстоянието ЯБ е по-голямо от 10 км, защото иначе ще има табели с по една цифра от всяка страна и със сбор на двете цифри, който е по-малък от 11, и значи е по-малък от 17. Следователно на магистралата има табела, на която от едната страна пише 10. От другата страна на тази табела стои число със сбор от цифрите 16. Най-малкото такова число е 79. Следователно разстоянието ЯБ е по-голямо или равно на 89 км. **2 точки**

Вече установихме, че разстоянието ЯБ не може да е по-голямо от 89 км, значи остава да е точно 89 км. **1 точка**

Сега ще проверим, че всички табели по пътя имат сума от цифрите 17. Нека $\overline{ab}$ е числото с цифри a и b от едната страна на табела. От $\overline{ab} \leq 89$ следва $a \leq 8$ и $b \leq 9$. Значи от другата страна на тази табела ще стои числото $89 - \overline{ab} = \overline{cd}$, като $c = 8 - a$ и $d = 9 - b$. Така сборът от цифрите на табелата е

$a + b + c + d = a + b + (8 - a) + (9 - b) = 17.$ **2 точки**

7.3. Разглеждаме множеството от естествените числа със сбор от цифрите 12 и такива, че в десетичния им запис не участват други цифри освен 1, 2 и 3. Каква е вероятността в записа на случайно избрано число от това множество да не участва цифрата 3?

Решение. Означаваме с X_n множеството от естествените числа със сбор от цифрите n и такива, че в десетичния им запис не участват други цифри освен 1, 2 и 3. Нека x_n е броят на елементите на X_n. Имаме

$$X_1 = \{1\} \Rightarrow x_1 = 1;\ X_2 = \{11; 2\} \Rightarrow x_2 = 2;\ X_3 = \{111; 12; 21; 3\} \Rightarrow x_3 = 4.$$

Нека $n > 3$ и $\overline{Aa} = 10A + a \in X_n$. Очевидно

$$a = 1 \Leftrightarrow A \in X_{n-1}; \quad a = 2 \Leftrightarrow A \in X_{n-2}; \quad a = 3 \Leftrightarrow A \in X_{n-3}.$$

Това означава, че $X_n = \{\overline{A1}: A \in X_{n-1}\} \cup \{\overline{A2}: A \in X_{n-2}\} \cup \{\overline{A3}: A \in X_{n-3}\}$. При това различните стойности на a ни гарантират, че трите съставляващи множества са две по две непресичащи се. Очевидно за броя на елементите на тези множества имаме

$$|\{\overline{A1}: A \in X_{n-1}\}| = x_{n-1}; \quad |\{\overline{A2}: A \in X_{n-2}\}| = x_{n-2}; \quad |\{\overline{A3}: A \in X_{n-3}\}| = x_{n-3}.$$

Следователно $x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3}$. Последователно пресмятаме

$x_4 = x_3 + x_2 + x_1 = 4 + 2 + 1 = 7;$

$x_5 = x_4 + x_3 + x_2 = 7 + 4 + 2 = 13;$

$x_6 = x_5 + x_4 + x_3 = 13 + 7 + 4 = 24;$

$x_7 = x_6 + x_5 + x_4 = 24 + 13 + 7 = 44;$

$x_8 = x_7 + x_6 + x_5 = 44 + 24 + 13 = 81;$

$x_9 = x_8 + x_7 + x_6 = 81 + 44 + 24 = 149;$

$x_{10} = x_9 + x_8 + x_7 = 149 + 81 + 44 = 274;$

$x_{11} = x_{10} + x_9 + x_8 = 274 + 149 + 81 = 504;$

$x_{12} = x_{11} + x_{10} + x_9 = 504 + 274 + 149 = 927.$

Така намерихме, че броят на всевъзможните изходи е 927. **3 точки**

За благоприятните изходи разсъжденията са аналогични. Разглеждаме множеството Y_n от естествените числа със сбор от цифрите n и такива, че в десетичния им запис не участват други цифри освен 1 и 2. Ако y_n е броят на елементите на Y_n, то

$$Y_1 = \{1\} \Rightarrow y_1 = 1; \; Y_2 = \{11; 2\} \Rightarrow y_2 = 2.$$

За $n > 2$ имаме $y_n = y_{n-1} + y_{n-2}$. Сега последователно намираме

$y_3 = 3;\ y_4 = 5;\quad y_5 = 8;\quad y_6 = 13;\quad y_7 = 21;\quad y_8 = 34;\quad y_9 = 55;\quad y_{10} = 89;\quad y_{11} = 144;$
$y_{12} = 233$. Значи благоприятните изходи са 233. **3 точки**

Окончателно, търсената вероятност е $\frac{233}{927} \approx 0{,}25$. **1 точка**

Забележка. Обосновката на рекурентните връзки трябва да са строги, например, защо са непресичащи се съставляващите множества. Приближената стойност не е задължителна. Ако се предложи комбинаторно решение, за пълен брой точки трябва да са разгледани прецизно всички случаи.