68. Национална олимпиада по математика

8 клас

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 8.1. (*Ивайло Кортезов*) На дъската бил записан изразът $x^2 + 20x - 19$. Когато в стаята влизало момиче, то заменяло навсякъде x с $\frac{1}{x}$, след което умножавало израза по x^2 и опростявало полученото до вида $ax^2 + bx + c$ за подходящи реални a, b, c. Когато в стаята влизало момче, то си намисляло някакво реално число p, заменяло навсякъде x с $x + p$ опростявало полученото до вида $ax^2 + bx + c$ за подходящи реални a, b, c. След известно време се оказало, че на дъската пише израз $x^2 + bx + c$, в който $c = b + 1$. Намерете всички възможни стойности на b.

Решение. Да изчислим стойността на $D = b^2 - 4ac$. След влизане на момиче числата a, b, c се появяват в обратен ред, което не променя D. След влизане на момче изразът $ax^2 + bx + c$ добива вида

$$a(x + p)^2 + b(x + p) + c = ax^2 + (2ap + b)x + (ap^2 + bp + c),$$

при което стойността на D става $(2ap + b)^2 - 4a(ap^2 + bp + c) = b^2 - 4ac$, т.е. отново не се променя. Сравнявайки стойностите на D при $x^2 + 20x - 19$ и $x^2 + bx + b + 1$, получаваме

$$400 + 4.19 = b^2 - 4b - 4$$

$$b^2 - 4b - 480 = 0,$$

чиито корени са $b = 24$ и $b = -20$. Тези стойности могат да се получат например при влизане на четен брой момичета, последвани от момче с намислено $p = 2$, съответно $p = -20$.

Оценяване (7 точки): 2 т. за доказване, че D е инвариант; 2 т. за доказване, че е необходимо $b = 24$ или $b = -20$; 1 т. за реализиране $b = 24$; 2 т. за реализиране $b = -20$.

Задача 8.2. (*Емил Стоянов*) Върховете на четириъгълника $MNKL$ лежат съответно на страните AB, BC, CD и DA на равнобедрения трапец $ABCD$ с основи AB и CD, като $MN||KL||AC$ и $NK||BD$. Докажете, че:

а) четириъгълникът $MNKL$ е успоредник;

б) лицето на $MNKL$ не надминава половината от лицето на $ABCD$.

Решение. а) Нека $MN \cap BD \ni P$, $LK \cap BD \ni Q$. Като използваме, че в равнобедрения трапец $ABCD$ $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB$, $\sphericalangle BDC = \sphericalangle ACD$, $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD$ и теоремите за съответни и кръстни ъгли, получаваме $\sphericalangle LDQ = \sphericalangle PNB$, $\sphericalangle DLQ = \sphericalangle PBN$, $\sphericalangle QDK = \sphericalangle QKD$. От последното равенство следва, че $\triangle DKQ$ е равнобедрен и $DQ = KQ = NP$ ($QPNK$ е успоредник по условие!), което заедно с първите две равенства на ъглите води до $\triangle LQD \cong \triangle BPN$, т.е $LQ = BP$. Но $\triangle MBP$ също е равнобедрен (доказва се аналогично на равнобедреността на $\triangle DKQ$), т.е. $BP = MP$. От последните две равенства и условието на задачата следва, че LQ е успоредна и равна на MP, което означава, че $LMPQ$ е успоредник и, следователно, $LM||PQ||KN$. Така доказахме, че четириъгълникът $MNKL$ е успоредник.

б) Първо ще докажем, че ако EF ($E \in AD$, $F \in BC$) е средната основа на трапеца, то $EL = FN$. Наистина, без да ограничаваме общността, можем да смятаме, че L е от отсечката AE. Пресечната точка O на диагоналите на $MNKL$ ги разполовява и лежи на средната основа EF (защо?). Да построим през L отсечката $LT||EF$, $T \in BC$. Тогава OF е средна отсечка в $\triangle LTN$, т.е. $FT = FN$. Но $FT = EL$ ($LTFE$ е равнобедрен трапец). От последното следва, че $EL = FN$. Нека сега построим и средите X и Y, съответно на основите AB и CD на трапеца $ABCD$. По теоремата на Вариньон четириъгълникът $XFYE$ е успоредник. Да означим още $G = MN \cap FY$, $H = KL \cap EX$, $U = KL \cap FY$, $V = MN \cap EX$. Да разгледаме триъгълниците FNG и LEH. Вече доказахме, че $EL = FN$. Остава да забележим, че $\sphericalangle GFN = \sphericalangle DBC = \sphericalangle CAD = \sphericalangle HLE$ и $\sphericalangle GNF = \sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB = \sphericalangle LEH$. Така доказахме, че триъгълниците FNG и

LEH са еднакви и имат равни съответни височини. Да сравним сега лицата на успоредниците $MVHL$ и $XFGV$. Имаме $S_{MVHL} = VH.h \leq XE.h = XF.h = S_{XFGV}$, където h е дължината на равните съответни височини в еднаквите триъгълници FNG и LEH, а $XE = XF = \frac{1}{2}AC$, като средни отсечки съответно в триъгълниците ABD и ABC. Аналогично доказваме, че $S_{GNKU} \leq S_{UYEH}$. Сега вече е ясно, че $S_{MNKL} \leq S_{XFYE} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$ (последното следва например от $S_{AXE} + S_{BXF} + S_{FYC} + S_{EYD} = 2S_{AXE} + 2S_{FYC} = S_{ABE} + S_{FDC} = \frac{1}{2}S_{ABD} + \frac{1}{2}S_{BDC} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$).

Оценяване (7 точки): а) 2 т.; б) 5 т., от които 1 т. за $EL = FN$, 1 т. за $\triangle FNG \cong \triangle LEH$, 2 т. за $S_{MNKL} \leq S_{XFYE}$ и 1 т. за завършване.

Задача 8.3. (*Ивайло Кортезов*) В някои полета на таблица 8×8 е записано числото 2, в други – числото 1, а останалите са празни. Две полета се наричат съседи, ако имат обща страна. Никое от 64-те полета няма два съседа с еднакви числа в тях. Намерете най-големия възможен сбор на числата в таблицата.

Решение. Долу в лявата таблица сборът от числата е 60. Във всяка таблица, обозначените с еднаква буква полета (виж дясната таблица) имат общ съсед, така че сред тях може да има най-много по едно с "1" и най-много по едно с "2" и общият сбор е не повече от $20.3 = 60$.

1	1	2	2	1	1	2	2
2							1
2		1	1	2	2		1
1		2			1		2
1		2			1		2
2		1	1	2	2		1
2							1
1	1	2	2	1	1	2	2

A	B	A	C	D	C	E	F
B	A	B	D	G	D	F	E
H	I	J	G	D	G	E	F
I	J	I	J	G	K	L	M
H	I	J	N	K	L	K	L
O	P	N	Q	N	K	L	M
P	O	Q	N	Q	R	S	R
O	P	T	Q	T	S	R	S

Оценяване (7 точки): 3 точки за подходящ пример и 4 точки за оценката.