68. Национална олимпиада по математика

Първи ден, 13 април 2019 г.
Решения на задачите

Задача 1. (Д. Данова, Н. Николов) Нека $f(x) = x^2 + bx + 1$, където b е реален параметър. Да се намери броят на целочислените решения на неравенството $f(f(x) + x) < 0$.

Решение. Ако $|b| \le 2$, то $f(x) \ge 0$ за всяко x.

Нека $|b| > 2$ и $x_1 < x_2$ са реалните нули на f. Тогава

$$(*) \quad f(f(x)+x) = (f(x)+x-x_1)(f(x)+x-x_2)$$

$$= (x-x_1)(x-x_2+1)(x-x_2)(x-x_1+1).$$

1) $x_2 - x_1 \le 1$, т.е. $2 < |b| \le \sqrt{5}$. Понеже $f(\pm 1) = 2 \pm b$, лесно следва, че целите числа x, за които $f(f(x)+x) < 0$, са -1 и -2 при $b > 0$, и 1 и 0 при $b < 0$.

2) $x_2 - x_1 > 1$, т.е. $|b| > \sqrt{5}$. Тогава всеки от интервалите $(x_1 - 1, x_1)$ и $(x_2 - 1, x_2)$ съдържа точно по едно цяло число x, за което $f(f(x)+x) < 0$, освен ако x_1 или x_2 не са цели числа.

И така, търсеният брой е равен на 0 при $|b| \le 2$, на 1 при $b = m + 1/m$, $m \in \mathbb{Z}$, $|m| \ge 2$, и на 2 в останалите случаи.

Оценяване. По 2 т. за $(*)$, 1) и 2), и 1 т. за довършване.

Задача 2. (Е. Колев) Даден е остроъгълен триъгълник ABC с ортоцентър H и център на описаната окръжност O. Симетралата на CH пресича страните AC и BC съответно в точки X и Y. Правите XO и YO пресичат страната AB съответно в точки P и Q. Ако $XP + YQ = AB + XY$ да се намери $\measuredangle OHC$.

Решение. Първи начин. Нека N и M са съответно среди на CH и AC. За $\triangle CYO$ и $\triangle CNM$ имаме: $\measuredangle OCY = \measuredangle MCN$ и $\dfrac{CY}{CN} = \dfrac{CO}{CM}$ (следва от подобието на $\triangle CYN$ и $\triangle COM$), което означава, че $\triangle CYO \sim \triangle CNM$. Следователно $\measuredangle CYO = \measuredangle CNM$. Понеже MN е средна отсечка в $\triangle AHC$, то $\measuredangle CHA = 180^\circ - \beta$, т.е. $\measuredangle BYQ = \beta$, откъдето $YQ = BQ$. Аналогично $XP = AP$.

Условието $XP + YQ = AB + XY$ дава $XY = QP$ и тъй като $XY \parallel PQ$, то $QPYX$ е успоредник. Тъй като O е пресечна точка на диагоналите на този успоредник, то разстоянието от O до XY е равно на разстоянието от O до AB, което е $R\cos\gamma$. Понеже $HN \perp XY$ и $XN = R\cos\gamma$, то търсеният ъгъл е 90°.

Втори начин. Ако N е средата на CH, то $CN = R\cos\gamma$ и следователно $CY = \dfrac{R\cos\gamma}{\sin\beta}$. Тогава:

$$BY = BC - CY = 2R\sin\alpha - \frac{R\cos\gamma}{\sin\beta} = \frac{R\cos(\alpha-\beta)}{\sin\beta}.$$

Ако $\measuredangle BYO = \varphi$ от синусовата теорема за $\triangle OBY$ получаваме:

$$\frac{R}{\sin\varphi} = \frac{R\cos(\alpha-\beta)}{\sin\beta\sin(90\circ - \alpha + \varphi)} \iff \mathrm{cotg}\varphi = \mathrm{cotg}\beta.$$

Следователно $\varphi = \beta$, т.е. $YQ = BQ$ и решението се довършва както по-горе.

Оценяване. 2 т. за подобието $\triangle CYO \sim \triangle CNM$, 1 т. за $\measuredangle CNM = 180^\circ - \beta$, 1 т. за $YQ = BQ$ (или $XP = AP$), 1 т. за доказване, че $QPYX$ е успоредник, 2 т. за довършване.

Задача 3. (А. Иванов, С. Харизанов) Да се намерят всички реални числа a със следното свойство: за всяка безкрайна редица $a_1, a_2, a_3, \ldots$ от две по две различни естествени числа, за която неравенството $a_n \le an$ е изпълнено за всяко естествено число n, съществуват безбройно много членове на редицата със сума на цифрите в бройна система с основа 4038, която не е кратна на 2019.

Решение. Отговор: $1 \le a < 2019$. Ясно е, че $a \ge 1$, тъй като a_1 трябва да е естествено число, не по-голямо от a. Нека означим със $\sigma(a_n)$ остатъкът при деление на 2019 на сборът от цифрите на a_n в 4038-ична бройна система. Да разгледаме редицата $\{b_n \ : \ \sigma(b_n) = 0\}_{n=0}^{\infty}$, от числата, чиято сума от цифри в 4038-ична бройна система се дели на 2019. Имаме $b_0 = 0$, $b_1 = 2019$, и т.н. Тогава, за всяко

$n \in \mathbb{N}$, $\{\sigma(2019n), \sigma(2019n+1), \dots, \sigma(2019n+2018)\}$ е ПСО по модул 2019, тъй като в представянето си $2019n, \dots, 2019n+2018$ се различават единствено по последна цифра. Следователно

$$2019n \leq b_n \leq 2019n + 2018. \tag{1}$$

Да разгледаме произволна редица $a_1, a_2, a_3, \dots$, която да не удовлетворява условието на задачата, т.е., само краен брой нейни членове $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$ изпълняват $\sigma(a_{i_j}) = 0$. Тогава, $\exists M > 0$, $M \in \mathbb{N}$, такова, че $a_m \in \{b_n\}_0^\infty$, $\forall m \geq M$ и значи за всяко естествено N, числото $a_{M+k} \in \{b_n\}_0^\infty$, $k = 0, \dots, N$. Да допуснем, че $a < 2019$. Понеже елементите на редицата са два по два различни, получаваме

$$2019N \leq b_N \leq \max_{0 \leq k \leq N} a_{M+k} \leq a(M+N) \;\Rightarrow\; N \leq \frac{aM}{2019-a}, \;\forall N, \tag{2}$$

което е противоречие, поради предварителния (фиксиран!) избор на M и a. Следователно $1 \leq a < 2019$ е решение на задачата.

За $a \geq 2019$, редицата $1, b_1, b_2, \dots$ удовлетворява ограничението $a_n := b_{n-1} < 2019(n+1) \leq a(n+1)$ за всяко n и $\sigma(a_n) = 0$, $\forall n \geq 1$. Следователно, в тази редица единствено при първия елемент сборът от цифрите му в бройна система с основа 4038 не се дели на 2019. Следователно, $a \geq 2019$ не води до нови решения. Окончателно, $a < 2019$.

Оценяване. 1 т. за въвеждане на редицата (b_n), 2 т. за оценките (1), 2 т. за оценките (2) и 1 т. за случая $a \geq 2019$ и 1 т. за довършване. Ако няма други точки, 1 т. за правилен отговор, придружен с хипотеза.