Национална олимпиада по математика, 2018 г.

Първи ден, решения и критерии за оценяване

Задача 1. Дадено е множество M от естествени числа с n елемента, където n е нечетно естествено число. Едно непразно подмножество T на M се нарича *добро*, ако произведението на елементите на T се дели на сумата на елементите на M, но не и на нейния квадрат. Ако самото множество M е добро, колко най-много могат да бъдат добрите множества?

Решение. Ако $A \cup B = M$ и $A \cap B = \varnothing$, то най-много едно от множествата A и B е добро, тъй като в противен случай M не е добро. Следователно броят на добрите множества не надминава половината от броя на всички подмножества, т.е. 2^{n-1}.

Ще докажем, че горната оценка е точна. Нека $n = 2k+1$ и да изберем просто число p, за което

$$p > \frac{n(n-1)}{2}.$$

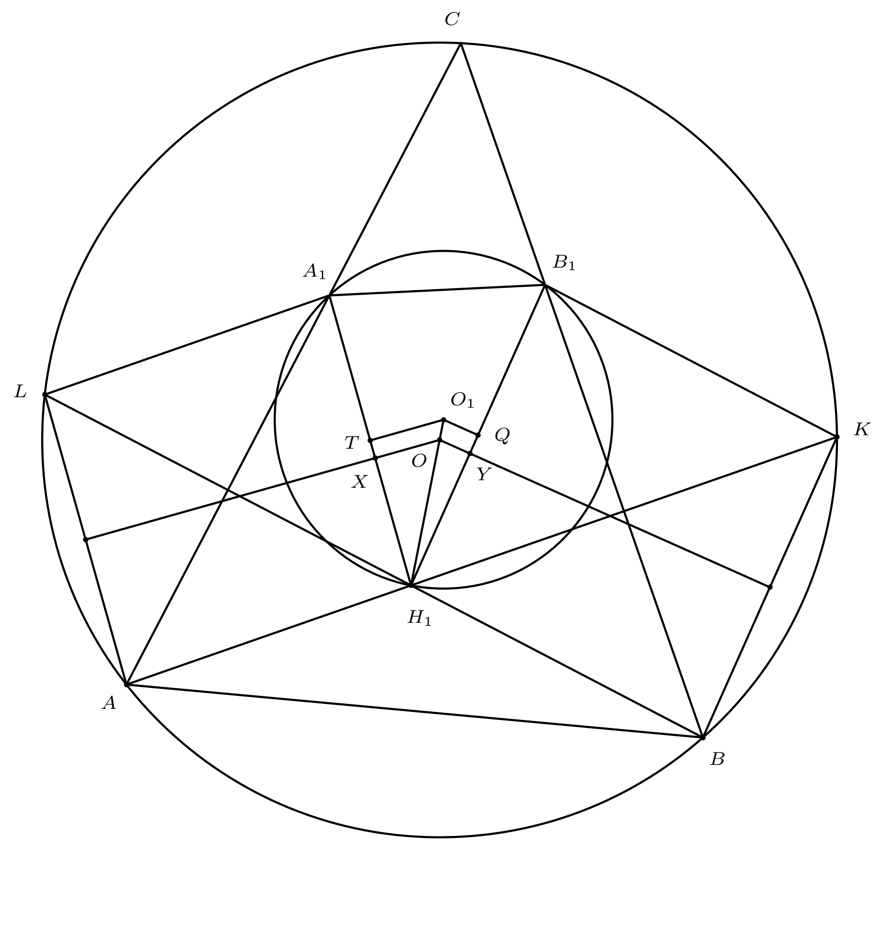
Да запишем $p^k = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$, където $a_i = i$ за $i = 1, 2, \ldots, n-1$ и $a_n = p^k - \dfrac{n(n-1)}{2}$. Тогава числата a_i са взаимнопрости с p. Да разгледаме множеството

$$M = \{pa_i \mid i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Тогава сумата на елементите на M е равна на p^{k+1} и лесно се вижда, че добрите множествата са точно тези, за които броят на елементите е поне $k+1$. Това са точно половината множества, т.е. броят на добрите множества е 2^{n-1}.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за оценката, че броят не надминава 2^{n-1}; 5 т. за пример.

Задача 2. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност. Точка H_1 е ортоцентър на $\triangle ABC$, а точките A_1 и B_1 са симетрични съответно на точките A и B спрямо правите BH_1 и AH_1. Точка O_1 е център на описаната окръжност на $\triangle A_1B_1H_1$. Точка H_2 е ортоцентър на $\triangle ABD$, а точките A_2 и B_2 са симетрични съответно на точките A и B спрямо правите BH_2 и AH_2. Точка O_2 е център на описаната окръжност на $\triangle A_2B_2H_2$. Означаваме правата O_1O_2 с l_{AB}. Аналогично дефинираме правите l_{BC}, l_{CD} и l_{DA}. Ако $l_{AB} \cap l_{BC} = M$, $l_{BC} \cap l_{CD} = N$, $l_{CD} \cap l_{DA} = P$ и $l_{DA} \cap l_{AB} = Q$, да се докаже, че точките M, N, P и Q лежат на една окръжност.



Решение. Лема. Точка O_1 лежи на правата H_1O, където O е центъра на описаната окръжност за $\triangle ABC$. Отношението в което O_1 дели H_1O зависи само от $\angle ACB$.

Доказателство: Нека K и L са пресечните точки на AH_1 и BH_1 с окръжността. Тъй като H_1 и L са симетрични спрямо AC, то четириъгълникът H_1ALA_1 е ромб, като $\angle AH_1A_1 = 2\angle AH_1L = 2\gamma$. Аналогично H_1BKB_1 е ромб с $\angle BH_1B_1 = 2\gamma$. Следователно H_1ALA_1 и H_1BKB_1 са подобни ромбове, откъдето получаваме

$$\frac{H_1T}{H_1X} = \frac{H_1Q}{H_1Y} = \frac{1}{1+2\cos 2\gamma}.$$

Това равенство означава, че O_1 лежи на правата H_1O и отношението в което O_1 дели H_1O зависи само от $\angle ACB$.

Ясно е, че CH_1H_2D е успоредник (следва от $CH_1 = CH_2 = 2R\cos\gamma$) и O_1 и O_2 са хомотетични съответно на H_1 и H_2 спрямо O. Според лемата коефициентите на двете хомотетии са равни (защото зависят само от γ). Следователно $O_1O_2 \parallel H_1H_2 \parallel CD$, т.е. правата l_{AB} е успоредна на CD.

Получихме, че страните на $MNPQ$ са успоредни на страните на $ABCD$ и следователно $MNPQ$ е вписан.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за доказване, че H_i, O и O_i лежат на една права; 1 т. за доказване, че отношенията, в които O дели H_iO_i за $i = 1, 2$ са равни; 1 т. за доказване, че CH_1H_2D е успоредник; 2 т. за доказване, че страните на $MNPQ$ са успоредни на страните на $ABCD$; 1 т. за довършване на решението.

Задача 3. Да се докаже, че $\left(\frac{6}{5}\right)^{\sqrt{3}} > \left(\frac{5}{4}\right)^{\sqrt{2}}$.

Решение. Първо ще докажем, че ако $x > -1$, $x \neq 0$ и $\alpha \in (1, 2)$, то

$$(1) \quad 0 < f(x) = (1+x)^\alpha - 1 - \alpha x - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 - \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3.$$

Имаме, че

$$f'(x) = \alpha[(1+x)^{\alpha-1} - 1 - (\alpha-1)x - \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2}x^2],$$
$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)[(1+x)^{\alpha-2} - 1 - (\alpha-2)x],$$
$$f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)[(1+x)^{\alpha-3} - 1],$$

Понеже $f'''(x) < 0$ при $x \in (-1, 0)$ и $f'''(x) > 0$ при $x > 0$, то $f''(x) > f(0) = 0$ при $x > -1$, $x \neq 0$. Тогава $f'(x) < f'(0) = 0$ при $x \in (-1, 0)$ и $f'(x) > f'(0) > 0$ при $x > 0$, откъдето $f(x) > f(0) = 0$ при $x > -1$, $x \neq 0$.

Сега ще докажем, че $\left(\frac{6}{5}\right)^{\sqrt{3}} > \left(\frac{5}{4}\right)^{\sqrt{2}}$. Полагаме $x = \frac{1}{5}$ и $\alpha = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Съгласно (1), достатъчно е да проверим, че

$$\alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 > \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$
$$\frac{277}{1500}\alpha + \frac{3}{125} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha > \frac{339}{277} \Leftrightarrow 3.277^2 > 2.339^2 \Leftrightarrow 230187 > 229842.$$

Последното очевидно е вярно, с което задачата е решена.

Забележка. $\left(\frac{5}{4}\right)^{\sqrt{2}} = 1,3710... < 1,3713... = \left(\frac{6}{5}\right)^{\sqrt{3}}$

Оценяване. (7 точки) 3 т. за (1) и 4 т. за довършване на решението.