Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

Национална олимпиада по математика
София, 15 април 2022 г.
Тема за 7 клас

КРАТКИ ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ

1 задача. Да се докаже, че ако $a>0, b>0, c>0$, то

а) $3\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{a^3}\right)\geq\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+4$;

б) $\frac{a^2+a+1+3b}{c}+\frac{b^2+b+1+3c}{a}+\frac{c^2+c+1+3a}{b}\geq 18$.

Кога се достигат равенствата?

Решение: При доказателството на неравенствата ще използваме , че $x+\frac{1}{x}\geq 2$ за всяко положително x .

а) (3 т.) Преработваме условието последователно и получаваме:

$$3\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{a^3}\right)-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)=3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\left(\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2-1\right)-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)=$$

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\left(3\left(\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2\right)-4\right)\geq 2.(3.2-4)=4$$

б) (4 т.) (7 т. От $(x-1)^2\geq 0$ имаме, че $x^2+1\geq 2x$. Прилагаме този факт и получаваме

$$\frac{a^2+a+1+3b}{c}+\frac{b^2+b+1+3c}{a}+\frac{c^2+c+1+3a}{b}\geq\frac{3a+3b}{c}+\frac{3b+3c}{a}+\frac{3c+3a}{b}=$$

$$=3\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}\right)=3\left(\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\right)\geq 3.(2+2+2)=18$$

2 задача. Нека ABC е правоъгълен триъгълник $(\sphericalangle ACB=90^\circ)$, такъв че $\sphericalangle ABC>\sphericalangle BAC$. През върха A е построена права, успоредна на BC , а върху нея е взета точка D , такава че $\sphericalangle DBC=\sphericalangle BAC$. Ако е известно, че $BD=2AC$ и M е средата на BD , да се докаже, че $CM \parallel AB$.

***Решение:*(7 т.)** Нека $DE\cap AC=P$ и да построим $DE\perp AD, E\in BC$. Четириъгълникът $ACED$ е правоъгълник и следователно $DE=AC$. В правоъгълния триъгълник

DBE $DE=\frac{1}{2}DB$, откъдето $\sphericalangle DBE=30^\circ$. Следователно острите ъгли на дадения триъгълник са $\sphericalangle BAC=30^\circ, \sphericalangle ABC=60^\circ$, а оттук и $\sphericalangle ABP=30^\circ$. Така установихме, че триъгълник ABP е равнобедрен, $\sphericalangle APB=120^\circ$, $AP=BP$, откъдето $PM=BM-BP=AC-AP=PC$. Това означава, че триъгълник PCM е равнобедрен, $\sphericalangle MPC=\sphericalangle APB=120^\circ$ и $\sphericalangle PCM=30^\circ$. Окончателно $CM \parallel AB$, тъй като кръстните ъгли, получени при пресичането на AB и CM с AC, са равни.

3 задача. а) Нека $d_1=1<d_2<d_3<\dots$ са всички делители на числото 2022^4 .
С колко цифри е записано числото d_{116} ?

б) Да се докаже, че не съществува естествено число n , такова че 6^n-1 да дели 2022^n+1 .

Решение: а) (3 т.) Броят на делителите на $2022^4=\left(2.3.337\right)^4$ е равен на 5.5.5= 125.

Ще използваме, че $d_k.d_{126-k}=2024^4$, откъдето получаваме, че $d_{116}=\frac{2022^4}{18}=72.337^4$.
С непосредствено пресмятане или чрез оценки се вижда, че d_{116} е 12-цифрено число.

б) (4 т.)Понеже 6^n-1 винаги се дели на 5, то 2022^n+1 ще се дели на 5 само ако $n=4k+2$. Но тогава $6^{4k+2}-1$ ще се дели на 7. Имаме
$2022^n+1\equiv 6^n+1\equiv\left(-1\right)^{4k+2}+1=2$, което не се дели на 7.