Министерство на образованието и науката

72. Национална олимпиада по математика

Национален кръг, 8. април 2023 г.

ТЕМА ЗА 7. КЛАС — РЕШЕНИЯ

Задача 1. Тройка цели числа (x, y, z) наричаме *хубава*, ако е изпълнено равенството

$$x^2 + y^2 + z^2 = x + 2y + 6z.$$

а) Да се намери броят на хубавите тройки.

б) Да се намери най-малката възможна стойност на $x + y + z$, ако (x, y, z) е хубава тройка.

Решение. а) Умножаваме двете страни на даденото равенство с 4 и допълваме до точни квадрати по следния начин:

$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 4x + 8y + 24z \Leftrightarrow$$

$$\left(4x^2 - 4x + 1\right) + \left(4y^2 - 8y + 4\right) + \left(4z^2 - 24z + 36\right) = 1 + 4 + 36 \Leftrightarrow$$

$$(2x - 1)^2 + (2y - 2)^2 + (2z - 6)^2 = 41.$$

(1 точка)

Получаваме, че числото 41 е сбор от три точни квадрата: $(2x - 1)^2$ – нечетно число, а $(2y - 2)^2$ и $(2z - 6)^2$ са четни числа. Възможностите за такова представяне на 41 са следните:

$$41 = 1 + 4 + 36 = 1 + 36 + 4 = 9 + 16 + 16 = 25 + 16 + 0 = 25 + 0 + 16.$$

(1 точка)

Във всеки от първите три случая има по 8 различни решения, а при последните два случая – по 4 решения.

Например, при $(2x - 1)^2 = 1, (2y - 2)^2 = 36$ и $(2z - 6)^2 = 4$, получаваме $2x - 1 = \pm 1$, $2y - 2 = \pm 6$, $2z - 6 = \pm 2$.

Следователно броят на тройките е $3.8 + 2.4 = 32$. **(2 точки)**

б) Най-малка стойност на сбора може да се получи при неположителни стойности на изразите $2x - 1$, $2y - 2$ и $2z - 6$.

(1 точка)

$2x - 1$	-1	-1	-3	-5	-5
x	0	0	-1	-2	-2
$2y - 2$	-2	-6	-4	-4	0
y	0	-2	-1	-1	1
$2z - 6$	-6	-2	-4	0	-4
z	0	2	1	3	1
$x + y + z$	0	0	-1	0	0

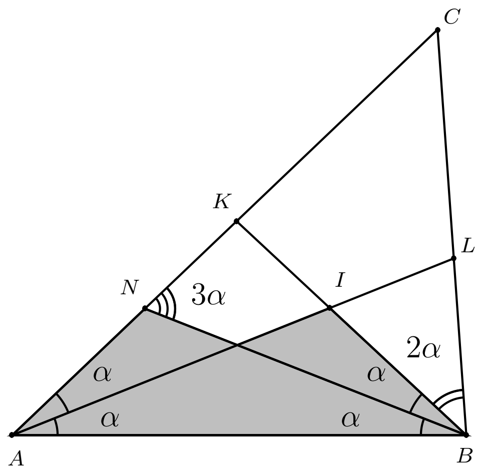
Така получаваме, че търсената най-малка стойност е -1. **(2 точки)**

Задача 2. Даден е триъгълник ABC, в който $\sphericalangle ABC = 2 \sphericalangle CAB$. Ъглополовящите AL и BK ($L \in BC$, $K \in AC$) се пресичат в точка I и $AI = BC$.

а) Да се намерят ъглите на триъгълника ABC.

б) Да се докаже, че $AK + BL = AB$.

Решение. Нека $\sphericalangle BAL = \sphericalangle LAC = \alpha$, $\sphericalangle CBK = \sphericalangle KBA = 2\alpha$.



а) Нека точката $N \in AC$ е такава, че $\sphericalangle ABN = \alpha$. По втори признак $\triangle BAN \cong \triangle ABI$, откъдето следва, че $AI = BN$. Следователно

$$BN = BC.$$

От друга страна,

$$\sphericalangle BNC = \sphericalangle BAN + \sphericalangle ABN = 3\alpha = \sphericalangle CBN,$$

следователно в $\triangle CBN$ имаме

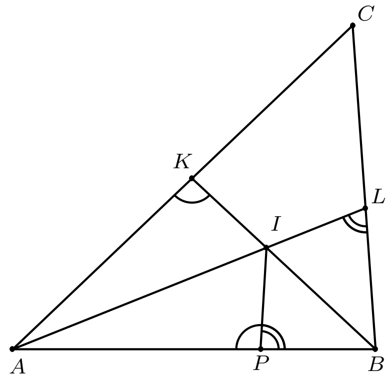
$$CN = BC.$$

Така получихме, че триъгълникът CBN е равностранен.

От сбора на ъглите в $\triangle ABC$ намираме, че $6\alpha = 180°$, $\alpha = 20°$ и $\sphericalangle A = 40°$, $\sphericalangle B = 80°$. **(4 точки)** б) Нека точката $P \in AB$ е такава, че $AP = AK$. По първи признак $\triangle API \cong \triangle AKI$, откъдето следва, че $\sphericalangle API = \sphericalangle AKI = 100^\circ$. Тогава

$$\sphericalangle BPI = 180^\circ - \sphericalangle API = 80^\circ = \sphericalangle ALB$$

и по втори признак $\triangle BPI \cong \triangle BLI$. Следователно $BP = BL$ и получаваме, че $AK + BL = AP + BP = AB$. (**3 точки**)



Задача 3. Да се намерят всички множества от четири трицифрени числа A, B, C и D със следните свойства:

- всеки две от числата A, B, C и D са различни;
- числата A, B, C и D имат една и съща цифра на стотиците;
- сборът $A + B + C + D$ се дели на три от числата A, B, C и D.

Решение. Нека цифрата на стотиците на дадените числа е a, а сборът $A + B + C + D = S$ се дели на A, B и C, като $A > B > C$. Тогава $\dfrac{S}{A} < \dfrac{S}{B} < \dfrac{S}{C}$ и

$$400a < S < 400(a + 1).$$

(**1 точка**)

Нека $S = kA$, където k е естествено число, по-голямо от 1.

Ако $k = 2$, получаваме

$$400a < S = 2A < 2.100(a + 1) \iff a < 1,$$

противоречие.

Следователно $k \geqq 3$, т.е. $\dfrac{S}{A} \geqq 3$. Тогава $\dfrac{S}{B} \geqq 4$ и $\dfrac{S}{C} \geqq 5$. (**1 точка**)

1) Ако $\dfrac{S}{C} = 5$, то $\dfrac{S}{B} = 4$ и $\dfrac{S}{A} = 3$. Ще използваме, че

$$100a \leqq D = S - \frac{S}{3} - \frac{S}{4} - \frac{S}{5} = \frac{13}{60} \cdot S = \frac{13}{20} \cdot A = 0,65A < 0,65.100.(a + 1),$$

от което следва $35a < 65$, следователно $a = 1$. (**1 точка**)

Освен това, $\dfrac{S}{5} > 100$, $\dfrac{S}{3} < 200$, т.е. $500 < S < 600$ и S се дели на 60. Единствената възможност е $S = 540$, отткъдето намираме

$$A = 180,\ B = 135,\ C = 108,\ D = 117.$$

(**1 точка**)

2) Нека $\dfrac{S}{C} \geqq 6$. Тогава

$$600a \leqq S < 400(a+1) \Leftrightarrow 3a < 2a + 2 \Rightarrow a = 1.$$

Също така

$$600 \leqq S \Leftrightarrow 200 \leqq \frac{S}{3}$$

и от $A < 200 \leqq \dfrac{S}{3}$ следва, че $3 < \dfrac{S}{A}$.

При $\dfrac{S}{C} = 6$ следва, че $A = \dfrac{S}{4}$, $B = \dfrac{S}{5}$,

$$D = S - \frac{S}{4} - \frac{S}{5} - \frac{S}{6} = \frac{23S}{60} = 2,3.C,$$

но тогава не може и C, и D да имат цифра на стотиците 1. (**1 точка**)

При $\dfrac{S}{C} = 7$, имаме

$$S = 7C < 800 \Rightarrow C < \frac{800}{7} < 115,$$

$$700 < S = A + B + C + D < \frac{800}{4} + \frac{800}{5} + 115 + 199 = 674,$$

което е невъзможно. (**1 точка**)

Ако $\dfrac{S}{C} \geqq 8$, то $800 \leqq S < 400(a+1) = 800$, противоречие. (**1 точка**)

Следователно $A = 180$, $B = 135$, $C = 108$, $D = 117$.