Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

72. Национална Олимпиада по математика

8 клас: условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 1. Даден е триъгълник ABC с $\angle BAC = 54^\circ$, $\angle ABC = 61^\circ$ и с център на описаната окръжност O. Нека AR ($R \in BC$) и BK ($K \in AC$) са височини в ABC. Точката A_1 от правата AR е такава, че $AR = A_1R$ и R е между A и A_1, а точката B_1 от правата BK е такава, че $BK = B_1K$ и K е между B и B_1. Описаните около триъгълниците AA_1C и BB_1C окръжности се пресичат за втори път в точката L.

а) Да се докаже, че $\angle KOR < 115^\circ$.
б) Да се намери големината на острия ъгъл между правите LO и RA.

Отговор. б) 54°

Решение. а) Имаме $\angle CBK = 25^\circ < \frac{1}{2}\angle ABC$ и $\angle CAR = 25^\circ < \frac{1}{2}\angle BAC$. Предвид известния факт, че ъглополовящата през връх на триъгълник е между височината и медианата през същия връх, получаваме, че средата на AC е вътрешна за AK и средата на BC е вътрешна за BR, оттук O е вътрешна за ABK и за ABR, т.е. е вътрешна и за триъгълника ABH, където $H = AR \cap BK$. Следователно H е вътрешна точка за триъгълника KOR и $\angle KOR < \angle KHR = 180^\circ - \angle ACB = 115^\circ$. (Неравенството $\angle KOR < \angle KHR$ следва от външните ъгли при O в триъгълниците KOH и ROH.)

б) Първо ще отбележим, че $BC = B_1C$, понеже $BK = B_1K$ и $CK \perp BB_1$; аналогично имаме $AC = A_1C$ и $AB_1 = AB = BA_1$. Пресмятаме $\angle BLC = \angle BB_1C = \angle B_1BC = 90^\circ - \angle ACB$ от окръжността на BB_1C и $BC = B_1C$, както и $\angle A_1LC = \angle A_1AC = 90^\circ - \angle ACB$ от окръжността на AA_1C, откъдето $\angle BLC = \angle A_1LC$, т.е. точките A_1, B и L лежат на една права. Оттук $\angle AA_1L = \angle AA_1B = \angle BAA_1 = \angle BAR = 90^\circ - \angle ABC$ (предвид $AB = A_1B$) и значи от окръжността на AA_1C следва $\angle ACL = \angle AA_1L = 90^\circ - \angle ABC$. От друга страна, от окръжността на ABC имаме $\angle ACO = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle AOC = 90^\circ - \angle ABC$, следователно $\angle ACO = \angle ACL$, т.е. точките C, O и L лежат на една права. Оттук ако $LO \cap RA = S$, то $\angle CSR = 90^\circ - \angle BCO = \angle BAC = 54^\circ$.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за а), от които 1 т. за коректна обосновка, че O е вътрешна за триъгълника ABH и 1 т. за завършване; 5 т. за б), от които 1 т. за верен отговор, 1 т. за предположението, че C, O и L лежат на една права и 3 т. за доказателство (от които 1 т. за това, че A_1, B, L или B_1, A, L лежат на една права)

Задача 2. а) В зависимост от естественото число k да се намери най-малката възможна стойност на израза $\dfrac{x^k+y^k+z^k}{(x+y+z)^k}$, където x, y и z са положителни реални числа.

б) Да се намерят всички естествени числа a, b, c и всички прости числа p, такива че $p \neq a+b+c$ и $a^p+b^p+c^p=(p+1)!$.

Отговор. а) $\frac{1}{3^{k-1}}$ б) $(a,b,c,p)=(2,1,1,2),(1,2,1,2),(1,1,2,2),(2,2,2,3)$.

Решение. а) От неравенството между средни степенни $\sqrt[k]{\frac{x^k+y^k+z^k}{3}} \geq \frac{x+y+z}{3}$, с равенство само при $x=y=z$, получаваме еквивалентното $\frac{x^k+y^k+z^k}{(x+y+z)^k} \geq \frac{1}{3^{k-1}}$.

б) При $p=2$ имаме $a^2+b^2+c^2=6$ и едно от числата е 2, а другите две са 1, а при $p=3$ имаме $a^3+b^3+c^3=24$, съответно $a=b=c=2$. (Във всички случаи $p \neq a+b+c$.) Оттук нататък нека $p \geq 5$. Малката теорема на Ферма дава $a^p+b^p+c^p \equiv a+b+c \pmod p$ и понеже p дели $(p+1)!$, получаваме, че p дели $a+b+c$. Предвид даденото $p \neq a+b+c$, заключаваме, че $a+b+c \geq 2p$.

От а) имаме $a^p+b^p+c^p \geq \frac{(a+b+c)^p}{3^{p-1}}$, откъдето $(p+1)! \geq \frac{2^p \cdot p^p}{3^{p-1}}$. С цел противоречие ще докажем по индукция, че $n^n > \frac{3^{n-1}\cdot(n+1)!}{2^n}$ за $n \geq 5$. При $n=5$ това е така понеже $5^5=3125 > \frac{81\cdot 45}{2} = \frac{3^4 \cdot 6!}{2^5}$. Ако допуснем, че $n^n > \frac{3^{n-1}\cdot(n+1)!}{2^n}$ е вярно за някое $n \geq 5$, то за да получим $(n+1)^{n+1} > \frac{3^n \cdot (n+2)!}{2^{n+1}}$ е достатъчно да докажем, че $\dfrac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \geq \dfrac{3}{2}(n+2)$ и тъй като $\frac{3}{2}\cdot\frac{n+2}{n+1} \leq \frac{3}{2}\cdot\frac{7}{6} < 2$ за $n \geq 5$, то е достатъчно да докажем, че $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2$.

При разкриване на скобите вляво чрез развитието на Нютоновия бином първите две събираеми са 1 и $n \cdot \frac{1}{n} = 1$, т.е. сумата е поне 2. (Алтернативно, при $(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})\cdots(1+\frac{1}{n})$ имаме събираемо 1 от умножение на n единици, както и n събираеми $\frac{1}{n}$ от избиране на това от кое $1+\frac{1}{n}$ да вземем $\frac{1}{n}$ и да вземем 1 от останалите.) Окончателно, за $p \geq 5$ задачата няма решение.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за верен отговор и обосновка на а) (0 т. при само верен отговор и/или случай на равенство); 6 т. за б), от които 1 т. за напълно верен отговор; 0 т. за свеждане до $p \geq 5$, 1 т. за $a+b+c \geq 2p$, 1 т. за свеждане до неравенство на p, което е вярно само за краен брой p (директно чрез а) или по друг начин), 3 т. за доказателство, че обратното неравенство е вярно от някое p нататък. Нестроги аргументи за неравенства, които типично изискват индукция, не носят точки.

Задача 3. В таблица 20×23 в черно са оцветени n от полетата, а останалите полета са бели. Ще наричаме сянка на таблицата най-големия брой черни полета сред всеки четири полета от таблицата с общ (за четирите) връх. Сянката на така оцветената таблица е 2, но ако оцветим кое да е бяло поле в черно, сянката ще нарасне. Намерете най-малкото и най-голямото възможно n.

Отговор. 154; 240.

Решение. Съседи ще наричаме полетата с обща страна.

Максимум – пример: Ако черни са полетата от нечетните колони, то сянката е 2 и $n = 20.12 = 240$. Всяко бяло поле попада в квадрат 2×2 заедно с две черни, така че оцветяването му в черно би увеличило сянката.

Максимум – оценка: Нека разделим таблицата без последната колона на квадрати 2×2. Във всеки от тях има най-много 2 черни полета, така че $n \leq 20.22/2 + 20 = 240$.

Минимум – пример: Ако черни са полетата от колони $3k - 1$, $k = 1, \ldots, 7$, а също и тези от редове $3k - 1$, $k = 1, \ldots, 7$ на колони 22 и 23, то сянката е 2 и $n = 7(20 + 2) = 154$. Всяко поле от колони $3k - 2$ и $3k$, $k = 1, \ldots, 7$, попада в квадрат 2×2 заедно с две черни от колона $3k - 1$, така че оцветяването му в черно би увеличило сянката. Всяко поле от ред $3k - 2$ и $3k$, $k = 1, \ldots, 7$ в колони 22-23 попада в квадрат 2×2 заедно с две черни от ред $3k - 1$, така че оцветяването му в черно би увеличило сянката.

Минимум – оценка: Нека има w бели и b черни полета. Във всяко черно поле ще запишем цяло число; отначало всички такива числа са 0. За всяко бяло поле P избираме точно един квадрат 2×2, включващ това поле и две черни полета (по условие поне един такъв съществува); ако черните са съседи на P, увеличаваме числата в тях с 1; ако предното не е изпълнено, то съсед е само едното и увеличаваме числото в него с 2. След приключване на тази процедура за всяко бяло поле, сборът от числата в черните ще е $2w$.

Да допуснем, че в някое черно поле P се е появило число, по-голямо от 4. Ако P няма черни съседи, то оцветяването на произволен бял съсед на P би увеличило числото в P с не повече от 1: абсурд. Ако P има не повече от два бели съседа, то оцветяването на всеки от тях би увеличило числото в P с не повече от 2: абсурд. Следователно P има 1 черен съсед (да го наречем Q) и 3 бели съседа (A, B, C, като B е симетричното поле на Q относно P). Щом сборът в P е по-голям от 4, всяко от полетата A, B, C е увеличило числото в P. Тъй като и C са бели, увеличението заради полето B е с 1. Тогава B има общ черен съсед с някое от полетата A, C; можем да считаме, че е с A. Но тогава A също ще увеличи числото в P само с 1. Така числото в P ще е най-много $1 + 1 + 2 = 4$: абсурд.

И така числата са не по-големи от 4, така че сборът им е не повече от $4b$. Оттук $2w \leq 4b$, така черните полета са поне $\lceil 20.23 : 3 \rceil = 154$.

Оценяване. (7 точки) За максимума: 1 т. за обоснован пример и 1 т. за доказана оценка. За минимума: 2 т. за обоснован пример и 3 т. за доказана оценка. Точки за други n (дори различаващи се с 1 от верните) не се присъждат.

Задачите са предложени както следва: 8.1, 8.2 – Мирослав Маринов, 8.3 – Ивайло Кортезов.