Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

---

72. Национална Олимпиада по математика

Условия, кратки решения и критерии за оценяване, втори ден

Задача 4. Да се докаже, че върху страната AD на изпъкнал четириъгълник $ABCD$ съществува единствена точка M, за която

$$\sqrt{S_{ABM}} + \sqrt{S_{CDM}} = \sqrt{S_{ABCD}},$$

тогава и само тогава $AB||CD$.

Решение.

Първи начин. (Н. Николов)

След повдигане на квадрат даденото равенство приема вида

$$2\sqrt{S_{ABM}S_{CDM}} = S_{BCM}.$$

Първо ще докажем, че ако $AB||CD$, то

$$(1)\ 2\sqrt{S_{ABM}S_{CDM}} \leq S_{BCM}.$$

за всяка точка $M \in [AD]$, като равенство се достига само в една точка.

Нека $AB = a$, $CD = b$, $d(M, AB) = x$ и $d(M, CD) = y$. Тогава

$$(1) \Leftrightarrow 2\sqrt{axby} \leq (a+b)(x+y) - ax - by \Leftrightarrow (\sqrt{ay} - \sqrt{bx})^2 \geq 0.$$

Равенство се достига само ако $AM/BM = a/b$. По-нататък, нека $D' \in AD$ така, че $CD'||AB$. Ако $\angle B + \angle C < 180°$, то $D \in (AD')$ и от (1) следва, че

$$2\sqrt{S_{ABM}S_{CDM}} < 2\sqrt{S_{ABM}S_{CD'M}} \leq S_{BCM}$$

за $M \in (A, D]$.

Ако $\angle B + \angle C > 180°$, то $D' \in (AD)$. Нека $f(M) = 2\sqrt{S_{ABM}S_{CDM}} - S_{BCM}$ за $M \in [AD]$. Очевидно $f(A) < 0$ и $f(D) < 0$. От друга страна, вече знаем, че има единствена точка $M' \in (AD')$, за която $2\sqrt{S_{ABM'}S_{CD'M'}} = S_{BCM'}$ и значи $f(M') > 0$. По непрекъснатост следва, че съществуват точки $M_1 \in (AM')$ и $M_2 \in (M'D)$ така, че $f(M_1) = f(M_2) = 0$. Оттук задачата следва.

Забележка. В случая $\angle B + \angle C > 180°$ съществуват точно две точки $M_1, M_2 \in (AD)$, за които

$$\sqrt{S_{ABM}} + \sqrt{S_{CDM}} = \sqrt{S_{ABCD}}.$$

Наистина, S_{ABM} и S_{CDM} са линейни функции на $M \in [AD]$. Следователно $\sqrt{S_{ABM}} + \sqrt{S_{CDM}}$ е строго вдлъбната функция и значи приема дадена стойност най-много два пъти.

Втори начин. (К. Делчев и Н. Николов)

Ще използваме, че ако $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ и $A_3(x_3, y_3)$, то удвоеното ориентирано лице на $\triangle A_1A_2A_3$ е равно на $x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)$.

Можем да считаме, че $A(0, 0)$, $B(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$, $D(0, 1)$ и $M = (0, m)$, където $x_1, x_2 > 0$. Записваме даденото равенство във вида $4S_{ABM}S_{CDM} = S_{BCM}^2$ и получаваме, че

$$4x_1x_2m(1-m) = (\triangle + m(x_2 - x_1))^2,$$

където $\triangle = x_1y_2 - x_2y_1 = 2S_{ABC} > 0$, т.е.

$$m^2(x_1+x_2)^2 + 2m((x_2-x_1)\triangle - 2x_1x_2) + \triangle^2 = 0.$$

Това уравнение има единствено решение $m \in (0,1)$ точно когато

$$D_1 = 4x_1x_2(x_1-\triangle)(x_2+\triangle) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \triangle \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2-1} \Leftrightarrow AB||CD.$$

Оценяване. *Първи начин* (7 точки) 2т. за случая $AB||CD$, 2т. за $\measuredangle B + \measuredangle C < 180^\circ$, 3т. за случая $\measuredangle B + \measuredangle C > 180^\circ$.
Втори начин (7 точки) 1т. за свеждането до $4S_{ABM}S_{CDM} = S^2_{BCM}$, 3т. за въвеждане на подходяща параметризация **и** изразяване на равенството от по-горе чрез нея, 3т. за довършване

Задача 5. За дадено естествено число n да се намери най-малката стойност на израза

$$|x_1| + |x_1 - x_2| + |x_1 + x_2 - x_3| + \cdots + |x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} - x_n|,$$

където $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са такива реални числа, че $|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| = 1$.

Отговор: 2^{1-n}.
Решение. Първи начин. (Ст. Герджиков и Н. Николов)
За всяко $n \in \mathbb{N}$ нека c_n е най-малкото реално положително число, за което

$$c_n\left(|x_1| + |x_1 - x_2| + |x_1 + x_2 - x_3| + \cdots + |x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} - x_n|\right) \geq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$

за всички реални числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Нека $S_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1}$. Да забележим, че от неравенството на триъгълника следва, че

$$|S_k - x_k| + (|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_{k-1}|) \geq |x_k|.$$

Следователно, ако

$$c_n \sum_{k=1}^{n} |S_k - x_k| \geq \sum_{k=1}^{n} |x_k|,$$

то

$$\begin{aligned} 2c_n \sum_{k=1}^{n+1} |S_k - x_k| &\geq |S_{n+1} - x_{n+1}| + 2c_n \sum_{k=1}^{n} |S_k - x_k| \\ &\geq |S_{n+1} - x_{n+1}| + 2\sum_{k=1}^{n} |x_k| \\ &\geq \left(|S_{n+1} - x_{n+1}| + \sum_{k=1}^{n} |x_k|\right) + \sum_{k=1}^{n} |x_k| \\ &\geq |x_{n+1}| + \sum_{k=1}^{n} |x_k| = \sum_{k=1}^{n+1} |x_k|. \end{aligned}$$

Тогава с индукция по n получаваме, че $c_n \leq 2^{n-1}c_1$. Очевидно $c_1 = 1$ и значи $c_n \leq 2^{n-1}$.

От друга страна, ако $x_1 = 2^{1-n}$, $x_k = 2^{k-n-1}$ за $k \geq 2$, то

$$S_k = 2^{k-n-1} = x_k$$

за $k > 1$. Следователно $\sum_{k=1}^{n} |S_k - x_k| = |x_1| = 2^{1-n}$. От друга страна, $\sum_{k=1}^{n} x_k = S_{n+1} = 1$. Значи $c_n \geq 2^{n-1}$. Окончателно, $c_n = 2^{n-1}$. Да отбележим, че това дава, че търсената минимална стойност е поне 2^{1-n}, а от друга страна от примера по-горе става ясно, че тя се достига. С това задачата е решена.

Втори начин. (Александър Иванов)
За $A_n := |x_1| + |x_1 - x_2| + |x_1 + x_2 - x_3| + \cdots + |x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} - x_n|$ имаме, че

$$\begin{aligned} A_n &\geq |x_1| + \frac{1}{2}|x_2 - x_1| + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}|x_n - x_1 - \cdots - x_{n-1}| \\ &\geq |x_1| + \frac{1}{2}(|x_2| - |x_1|) + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}(|x_n| - |x_1| - \cdots - |x_{n-1}|) \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 2^{1-n}, \end{aligned}$$

където второто неравенство следва от неравенство на триъгълника. За да имаме равенство в първия ред, то трябва $x_{i+1} = \sum\limits_{j=1}^{i} x_j$ за всяко $n \geq i > 1$, откъдето намираме $x_i = 2^{i-n-1}$ за $i \geq 2$ и $x_1 = 2^{1-n}$.

Трети начин. (К. Гаров)
Означаваме с $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ израза от условието на задачата:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = |x_1| + |x_1 - x_2| + |x_1 + x_2 - x_3| + \cdots + |x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} - x_n|$$

Забелязваме, че F е неотрицателна и непрекъсната. Следователно, тъй като единичната сфера е компактна, F достига своя минимум.
Нека минимумът на F се достига при $(X_1, X_2, \ldots, X_k, \ldots, X_n)$ и нека $S_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_{k-1}$ и $c_k = X_k + X_{k+1}$. За $1 \leq k \leq n-1$ означаваме с g_k функцията:

$$g_k(y) = F(X_1, \ldots, X_{k-1}, y, c_k - y, X_{k+1}, \ldots, X_n)$$

Тя достига своя минимум за $y = X_k$. Да отблежим, че единствените членове на сумата от израза F, които зависят от y са $|x_1 + \cdots + x_{k-1} - x_k|$ и $|x_1 + \cdots + x_k - x_{k+1}|$. Следователно $y = X_k$ минимизира този израз. Тогава от неравенство на триъгълника имаме:

$$|S_{k-1} - y| + |S_{k-1} + 2y - c_k| = |S_{k-1} - y| + 2|(S_{k-1} - c_k)/2 - y| \geq |(3S_{k-1} - c_k)/2| + |(S_{k-1} - c_k)/2 - y|$$

Следователно минимумът е равен на $|(3S_{k-1} - c_k)/2|$ и се достига за $y = (S_{k-1} - c_k)/2$. Тоест за всяко $1 \leq k \leq n-1$ имаме равенството $X_k = (S_{k-1} - c_k)/2$. Преобразуваме и получаваме, че $X_{k+1} = S_k$ или, че $X_k = 2^{k-1}X_1$. Следователно, $X_1 = 2^{1-n}$ и $F(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 2^{1-n}$. С това задачата е решена.

Забележка. Задачата може да се реши и като се съобрази, че търсеният минимум е реципрочен на l_1-нормата на обратния оператор B на линейния оператор, породен от функциите в модул ($||B||_1 = \max_j \sum_i |b_{ij}|$).

Оценяване. (7 точки) (Първи и втори начин) 2т. за отговор + пример за достигане на равенство, 2т. за подходящо неравенство на триъгълника, 3т. за довършване.
(Трети начин) 2т. за отговор + пример за достигане на равенство, Изразът достига своя минимум 2т., 1т. за фиксиране на всички аргументи без два и получавана на нов израз, 2т. за довършване.

Задача 6. В клас от 26 ученици всеки ученик се оценява по пет различни предмета, като за всеки предмет са възможни три различни оценки. Да се докаже, че ако 25 от тези ученици са получили своите оценки, то оценките на 26-ия ученик могат да се поставят така, че да се различават поне по два от предметите с оценките на всеки от останалите 25 ученици.

Решение. Ще казваме, че един троичен вектор с дължина 5 *покрива* друг, ако двата вектора се различават в най-много една позиция. Трябва да докажем, че не съществуват 25 троични вектора с дължина 5, които да покриват всички $3^5 = 243$ вектора. Да допуснем, че такова множество с 25 вектора съществува и да го означим с A.

Да разделим всички 243 вектора на 4 групи: B_0 - вектори с първи две координати 00; B_1 - вектори с първи две координати 01, 02, 10 или 20; B_2 - вектори с първи две координати 11 или 22 и B_3 - вектори с първи две координати 12 или 21. Ясно е, че $|B_0| = 27$, $|B_2| = |B_3| = 54$.

За първите две координати на всеки вектор има 9 възможности, а в A има 24 вектора. Можем да считаме, че от всички вектори в A като първи две координати най-малко пъти се появяват 00, като тогава 00 се появява най-много два пъти.

Да разделим векторите от A на 4 групи: A_0 - вектори с първи две координати 00; A_1 - вектори с първи две координати 01, 02, 10 или 20; A_2 - вектори с първи две координати 11 или 22 и A_3 - вектори с първи две координати 12 или 21. Нека $a_i = |A_i|$, като $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 25$, $a_0 \leq 2$ и без ограничение $a_2 < a_3$.

Следните наблюдения са очевидни: всеки вектор от A_0 покрива 7 вектора в B_0; всеки вектор от A_1 покрива по 1 вектор в B_0, B_2 и B_3; всеки вектор от A_2 покрива 7 вектора в B_2 и 2 вектора в B_3; всеки вектор от A_2 или A_3 покрива 2 вектора в B_1. всеки вектор от A_3 покрива 7 вектора в B_3 и 2 вектора в B_2.

От горните наблюдения получаваме: $7a_0+a_1 \geq 27$, $7a_2+a_1+2a_3 \geq 54$ и $7a_3+a_1+2a_2 \geq 54$. При $a_0 = 0$ следва $a_1 \geq 27$, противоречие. При $a_0 = 1$ следва $a_1 \geq 20$, като тогава $a_2+a_3 \leq 4$ и $7a_3 + a_1 + 2a_2 \geq 54$ не може да е вярно.

Получаваме $a_0 = 2$ и следователно $a_1 \geq 13$. Ако $a_2 = 4$, то най-голямата стойност на $7a_2 + a_1 + 2a_3$ е $7.4 + 13 + 12 = 53 < 54$, противоречие. Следователно единствената възможност е $a_1 = 13$, $a_2 = a_3 = 5$.

Без ограничение векторите от A с първи две координате 00 са 00000 и 00111 (в противен случай те няма да покриват 14 вектора). Тогава векторите

$$222, 220, 221, 202, 212, 022, 122, 012, 120, 201, 021, 210, 102$$

не са покрити в B_0 и следователно трябва да се появяват като опашки в A_1.

Всеки от векторите $001, 010, 100, 110, 101, 011$ е покрит по два пъти в B_1 (например 001 е покрит от 201 и 021), а трябва да бъде покрит 4 пъти. Следователно тези вектори трябва да се появяват като опашки в A_2 или A_3. Следователно знаем 6 опашки в A_2 или A_3 и има още 4 неизвестни опашки.

Всеки от векторите $002, 020, 200, 112, 121, 211$ трябва да е покрит общо 4 пъти в B_2 и B_3, като до този момент те са покрити по един път (например 002 е покрит само от 001). Следователно четирите неизвестни опашки трябва да осигуряват още $4.6 - 6 = 18$ покрития. Директно се проверява, че всеки вектор с дължина три покрива най-много 3 вектора от $002, 020, 200, 112, 121, 211$ в B_2 и B_3, т.е. неизвестните 4 опашки могат да осигурят най-много $4.3 = 12 < 18$ покрития, противоречие.

Оценяване. (7 точки) 2т. за $a_1 = 13, a_2 = a_3 = 5$, 5т. за довършване. За частични резултати от типа ако броят на учениците е $x < 25$, то можем да нагласим оценките на $x + 1-$вия така, че условието да е изпълнено се присъжда най-много 1т в зависимост от стойността на x.

Задачите са предложени от:
зад. 4 – Николай Николов, зад. 5 – Стефан Герджиков и Николай Николов,
зад. 6 – Емил Колев