Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

72. Национална Олимпиада по математика

Условия, кратки решения и критерии за оценяване, първи ден

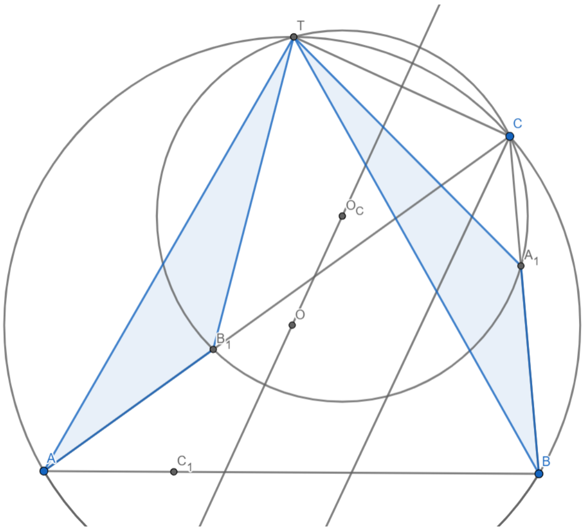
Задача 1. Даден е граф G с $n \geq 6$ върха, в който всеки връх е от степен поне 3. Ако $C_1, C_2, \ldots, C_k$ са всички цикли в G, то да се определят всички възможни стойности на най-големият общ делител на числата $|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_k|$, където с $|C|$ означаваме броят на върховете в цикъла C.

Решение. Нека $d = \text{НОД}(|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_k|)$. Първо ще докажем, че ако два цикъла C и D имат точно два общи върха, които са свързани с ребро в C и в D, то тогава следва, че $d|2$. Наистина, ако $C = abc_1c_2\ldots c_m$ и $D = abd_1d_2\ldots d_s$, то т.к C и D са цикли в G имаме $d|2+m$ и $d|s+2$. Сега да отблежим, че $d_1d_2\ldots d_s a c_m c_{m-1}\ldots c_1 b$ също е цикъл в G, което означава, че $d|s+m+2$. Така получаваме $d|(s+2)+(m+2)-(s+m+2)$, т.е $d|2$. Сега ще покажем, че G съдържа два цикъла, които имат точно два общи върха, които са съседни в циклите. Нека $P = w_0w_1w_2\cdots w_s v$ е път с максимална дължина в G. Тогава всички ребра от v са към върховете от P и т.к v е от степен поне 3, то съществуват $0 \leq i < j < s$, такива че vw_i и vw_j са ребра в G. Следователно циклите $w_jw_{j+1}\ldots w_s v$ и $w_i\ldots w_j v$ имат желаното свойство, откъдето получаваме, че $d|2$. Пример, в който $d=2$ се достига е достатъчно голям двуделен граф, например $K_{n-3,3}$, а $d=1$ се достига от K_n например.

Оценяване. (7 точки) 2 точки за ясен отговор **и** примери, за които $d=2$ и $d=1$ се достигат, 2 точки за съображението, че ако два цикъла имат точно едно общо ребро, то $d|2$, 3 точки за довършване.

Задача 2. Даден е разностранен триъгълник ABC. Нека A_1, B_1 и C_1 са допирните точки на външновписаните окръжности със страните BC, CA, AB съответно. Центровете на описаната около $\triangle AB_1C_1$, $\triangle BA_1C_1$, $\triangle CA_1B_1$ са означени с O_A, O_B, O_C съответно. Да се докаже, че правите през O_A, O_B и O_C, съответно успоредни на ъглополовящите на $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$ и $\sphericalangle C$, се пресичат в една точка.

Решение. Нека O е центърът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност, и нека T е средата на дъгата $\overset{\frown}{ACB}$ от описаната окръжност (виж чертежа). Имаме $AB_1 = BA_1$, $AT = BT$, $\angle B_1AT = \angle A_1BT$, следователно $\triangle B_1AT \cong \triangle A_1BT$. От еднаквостта получаваме, че $\angle CB_1T = \angle CA_1T$, следователно описаната около A_1B_1C окръжност минава през T и OO_C е симетрала на CT. Но правите OO_C и ъглополовящата на $\angle ACB$ са перпендикулярни на CT (защо?), следователно правата през O_C, успоредна на ъглополовяшата на $\angle ACB$



минава през O! Повтаряйки това разсъждение, достигаме до заключението, че исканите прави се пресичат в O.

Оценяване. (7 точки) 2т. за хипотеза, че трите прави се пресичат в т.O. 1т. за построяване на средата на някоя от дъгите $B\overset{\frown}{A}C, A\overset{\frown}{B}C$ или $A\overset{\frown}{C}B$, 2т. за $\triangle B_1AT \cong \triangle A_1BT$ и 2т. за довършване.

Задача 3. Нека $f(x)$ е полином с естествени коефициенти. За всяко $n \in \mathbb{N}$ нека $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots, a_n^{(n)}$ са фиксирани естествени числа, които дават два по два различни остатъка при деление с n и нека

$$g(n) = \sum_{i=1}^{n} f(a_i^{(n)}) = f(a_1^{(n)}) + f(a_2^{(n)}) + \cdots + f(a_n^{(n)}).$$

Да се докаже, че съществува константа M, за която за всяко естествено число $m > M$ имаме НОД$(m, g(m)) > 2023^{2023}$.

Решение. Нека $d = \deg f$ е степента на f, нека $t = d!$ и нека N е фиксирано естествено число. Да допуснем, че множеството $M := \{m \in \mathbb{N} : \text{НОД}(m, g(m)) \le N\}$ е безкрайно. Тогава ще докажем, че за всяко просто p имаме, че множеството $M_p := \{m \in M : p|m\}$ е безкрайно. Да допуснем противното, т.е съществува естествено число N_p, такова че за всяко $m \in M$, за което $m > N_p$ е в сила $(p, m) = 1$.
Ще ни бъде необходима следната

Лема. Нека $k, n \in \mathbb{N}$ и a е естествено число взаимнопросто с n. Тогава

$$n|(a^k - 1)\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^{(n)}\right)^k.$$

Доказателство. Т.к a е взаимнопросто с n и $\left(a_i^{(n)}\right)_{i=1}^{n}$ образува пълна система остатъци $\pmod n$, то $(aa_i^{(n)})_{i=1}^{n}$ също образува пълна система остатъци $\pmod n$. Следователно

$$\sum_{i=1}^{n}\left(aa_i^{(n)}\right)^k \equiv \sum_{i=1}^{n}\left(a_i^{(n)}\right)^k \pmod n,$$

с което лемата е доказана.
Също така понеже $a^k-1|a^l-1$, когато $k|l$, то след сумиране за $k=0,1,\dots,d$ получаваме, че $n|(a^t-1)\sum_{i=1}^{n} f(a_i^{(n)})$ за всяко естествено число n и всяко a взаимнопросто с n. Следователно в частност твърдението е изпълнено и за $a=p$ и $n \in \{m \in M : m > N_p\}$. Ако $m \in M$ е по-голямо от N_p, то получаваме, че $m|(p^t-1)g(m)$, откъдето следва $p^t-1 \geq \frac{m}{(m,g(m))} \geq \frac{m}{N}$, което е противоречие за $m > N(p^t-1)$, т.к p и t са фиксирани. Следователно M_p е безкрайно за всяко просто число p.
От друга страна обаче пак от лемата следва, че ако $p > d+1+N$ е просто число, $k \leq d$ е естествено число, а g е примитивен корен по модул p, то $p|(g^k-1)\sum_{i=1}^{p}\left(a_i^{(p)}\right)^k$, което означава, че $p|\sum_{i=1}^{p}\left(a_i^{(p)}\right)^k$ за всяко $k \leq d$. Оттук получаваме, че $p|g(p)$ за всяко $p > d+1+N$. Същият аргумент показва и, че ако $p|m$ и $p > d+1+N$, то $p|g(m)$. Следователно, ако $p > d+1+N$ е фиксирано просто число, то M_p е безкрайно означава, че съществува $m \in M$, такова че $p|m$, но от по-горе имаме, че $p|\text{НОД}(m,g(m)) \Rightarrow p \leq N$, което е противоречие с избора на p. Следователно M е крайно и твърдението от условието следва за $N = 2023^{2023}$.

Оценяване. (7 точки) 2т. за доказване, че ако $p > d+1+N$, то $p|m \Rightarrow p|g(m)$, 4т. за доказване, че множествата M_p са безкрайни, 1т. за довършване.

Задачите са предложени от:

зад. 1 – Кристиян Василев, зад. 2 – Александър Иванов, зад. 3 – Александър Иванов и Кристиян Василев