**Задача 7. Отг. 50 000.** Единственият начин сборът от цифрите на едно естествено число и сборът от цифрите на следващото по големина естествено число да имат общ делител е цифрата на единиците на по-малкото число да е 9, а цифрата на единиците на по-голямото число да е равна на 0.

Нека по-малкото число е $a_1 10^n + a_2 10^{n-1} + \ldots + a_{n-1}10^2 + a_n 10 + 9$, т.е. $\overline{a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n} + 9$ и $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n + 9 = 5k_1$. За следващото число имаме $\overline{a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n} + 10$. Ако $a_n < 9$, то $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + (a_n + 1) = 5l_1$. Оттук намираме

$$5l_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + (a_n + 1) = 5k_1 - a_n - 9 + (a_n + 1)$$

и следователно $5k_1 - 5l_1 = a_n + 9 - (a_n + 1) = 8$, което не е възможно, защото 8 не се дели на 5. Заключаваме, че $a_n = 9$ и по-малкото число фактически има вида $\overline{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}} + 99$.

И така, от направените разглеждания следва, че по-малкото число има вида

$$\overline{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}} + 99, \text{ като } a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + 18 = 5k_2.$$

За следващото число имаме $\overline{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}} + 100$. Ако $a_{n-1} < 9$, то

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-2} + (a_{n-1} + 1) = 5l_2 = 5k_2 - a_{n-1} - 18 + (a_{n-1} + 1)$$

и следователно $5k_2 - 5l_2 = a_{n-1} + 18 - (a_{n-1} + 1) = 17$. Това не е възможно, защото 17 не се дели на 5. Заключаваме, че $a_{n-1} = 9$ и по-малкото число фактически има вида $\overline{a_1 a_2 \ldots a_{n-2}} + 999$.

Като извършим горната процедура още веднъж, ще получим, че $a_{n-2} = 9$ и по-малкото число фактически има вида $\overline{a_1 a_2 \ldots a_{n-3}} + 9999$, като $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-3} + 36 = 5k_4$. За следващото число е изпълнено $\overline{a_1 a_2 \ldots a_{n-3}} + 10\,000$ и $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-4} + (a_{n-3} + 1) = 5l_4$. Сега $5k_4 - 5l_4 = a_{n-3} + 36 - (a_{n-3} + 1)$. В този случай не е необходимо да предполагаме, че $a_{n-3} = 9$. Достатъчно е да изберем $a_{n-3} = 4$ и $a_1 = a_2 = a_{n-4} = 0$. По-малкото число става $4.10^4 + 9999 = 49\,999$ и сборът от цифрите му $4 + 4.9 = 4 + 36 = 40$, което се дели на 5. Следващото число е 50 000, сборът от цифрите на което също се дели на 5.

Заключаваме, че отговорът на задачата е 50 000.

*Оценяване.* Откриването на верния отговор без обяснения се оценява с (**3 точки**). При наличие на пълно доказателство се прибавят (**7 точки**). При липса на пълно доказателство се присъждат точки за частични резултати, които водят до верния отговор, но не повече общо от (**3 точки**).

| задача | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| отговор | **A** | **D** | **B** | **B** | **C** | **8,3** | **50 000** |