Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

---

74. Национална Олимпиада по математика

Първи ден (5.4.2025), 9-12 клас

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 1. Да се намерят всички безкрайни редици $a_1, a_2, \dots$ от реални числа, за които е изпълнено
$$a_{m^2+m+n} = a_m^2 + a_m + a_n$$
за произволни (не непременно различни) естествени числа m и n.

Отговор. $a_n = n$ за всяко n; $a_n = 0$ за всяко n; $a_n = -1$ за всяко n; $a_n = 0$ за четни n и $a_n = -1$ за нечетни n; $a_n = -1$ за четни n и $a_n = 0$ за нечетни n.

Решение. Първи подход. Да означим $a_1 = x$. Имаме $a_{n+2} = a_n + x^2 + x$, в частност $a_3 = x^2 + 2x$ и $a_{13} = a_1 + 6(x^2+x) = 6x^2+7x$. От друга страна, $a_{13} = a_3^2 + a_3 + a_1 = (x^2+2x)^2 + (x^2+2x) + x = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 3x$. След приравняване получаваме $x^4 + 4x^3 - x^2 - 4x = 0$, което се разлага до $x(x-1)(x+1)(x+4) = 0$, съответно $a_1 = 0, 1, -1$ или -4. Ако $a_1 = -4$, то $a_{n+2} = a_n + 12$ за всяко n и $a_5 = 20$, $a_{35} = a_1 + 17 \cdot 12 = 200$, $a_{35} = a_5^2 + 2a_5 = 440$, противоречие.

Сега нека $a_2 = y$. От по-горе имаме $a_7 = a_1 + 3(x^2 + x) = 3x^2 + 4x$, а от друга страна $a_7 = a_2^2 + a_2 + a_1 = y^2 + y + x$, значи $y^2 + y = 3x^2 + 3x$. Имаме следните случаи:

- Ако $x = 0$ или $x = -1$, то $y = 0$ или $y = -1$ и $a_{n+2} = a_n$ за всяко n. И четирите възможности работят, понеже $t^2 + t = 0$ за $t = 0, -1$, а пък $m^2 + m + n$ и n са с еднаква четност.

- Ако $x = 1$, то $y^2 + y = 6$, съответно $y = 2$ или $y = -3$; освен това $a_{n+2} = a_n + 2$. В първия случай по индукция получаваме $a_n = n$ за всяко n (което явно изпълнява даденото), а във втория случай $a_4 = -1$, $a_{21} = a_4^2 + a_4 + a_1 = 1$, но и $a_{21} = a_1 + 2 \cdot 10 = 21$, противоречие.

Втори подход. Чрез полагането $m = 1$ получаваме $a_{n+2} = a_n + a_1^2 + a_1$.

- Ако $a_1^2 + a_1 = 0$ (тогава $a_1 = 0$ или $a_1 = -1$) от горното равенство получаваме

  (1) $$a_1 = a_3 = a_5 = \cdots \text{ и } a_2 = a_4 = a_6 = \cdots$$

  При $m = 2$ и $n = 1$ имаме $a_7 = a_2^2 + a_2 + a_1$ и понеже $a_1 = a_7$, то $a_2^2 + a_2 = 0$, значи $a_2 = 0$ или $a_2 = -1$. За всяка редица, изпълняваща (1), за която $a_1, a_2 \in \{0, -1\}$, равенството от условието е вярно, понеже $m^2 + m + n$ и n са с еднаква четност.

- Нека сега $a_1^2 + a_1 \neq 0$. Тогава редицата $a_1, a_3, \dots$ (съответно $a_2, a_4, \dots$ е аритметична прогресия с първи член a_1 (съответно a_2) и разлика $a_1^2 + a_1 \neq 0$. Следователно $a_{2k+1} = a_1 + k(a_1^2 + a_1)$ и $a_{2k} = a_2 + (k-1)(a_1^2 + a_1)$. Това означава, че $a_{2k} = a \cdot 2k + b$ и $a_{2k+1} = c(2k+1) + d$ за всяко k и някакви реални константи $a \neq 0, b, c \neq 0, d$.

Нека m и n са четни числа. Тогава от условието следва, че за всеки две m и n е изпълнено:

$$a(m^2+m+n)+b=(am+b)^2+am+b+an+b.$$

След сравняване на коефициентите получаваме $b^2+b=0, a=a^2, 2ab=0$. Предвид $a\neq 0$, единствената възможност е $a=1$ с $b=0$, съответно $a_{2k}=2k$. Аналогично чрез нечетни m и n получаваме $c=1$ с $d=0$, съответно $a_{2k+1}=2k+1$ за всяко k. Следователно $a_n=n$ за всяко n, което наистина изпълнява даденото уравнение.

Оценяване. (7 точки) *Първи подход.* 1 т. за пълно описание на работещите редици; 1 т. за проверка, че наистина работят; 3 т. за получаване на $a_1=0,1,-1$ (1 т. за получаване на уравнение за a_1, 1 т. за решаването му и 1 т. за отхвърляне на стойности, различни от желаните); 1 т. за получаване на уравнение от най-много втора степен между a_1 и a_2; 1 т. за довършване.
Втори подход. 1 т. за пълно описание на работещите редици; 1 т. за проверка, че наистина работят; 1 т. за получаване, че подредиците от членове с четни и нечетни номера са аритметични прогресии; 1 т. за пълен анализ на случая с разлика 0; 2 т. за доказване, че $a_n=n$ за четни (или нечетни) n при ненулева разлика на прогресията; 1 т. за довършване.

Задача 2. При дадено естествено число n нека точно n от клетките на квадратна таблица $n\times n$ са оцветени в черно, а останалите – в бяло; *цената* на такова оцветяване е минималният брой бели клетки, които трябва да се преоцветят в черно, така че от всяка черна клетка да може да се стигне до всяка друга черна клетка чрез последователност от черни клетки, в която всеки две поредни клетки имат обща страна. Нека $f(n)$ е максималната възможна цена спрямо всички първоначални оцветявания за дадено n. Да се намери реално число α, такова че за всяко естествено число $n\geq 100$ е в сила

$$\frac{1}{3}n^{\alpha}\leq f(n)\leq 3n^{\alpha}.$$

Отговор. $\alpha=3/2$.

Решение. За горната граница, при $m=\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ да разгледаме колоните с номера cm за $c=1,2,\ldots,m$. За всяка първоначално оцветена клетка нека изградим път от нея до най-близката до нея колона. Нека също оцветим всяка от тези колони в черно, както и първия ред – с това желаното свързване е получено. За всяка от n-те първоначално черни клетки това изисква не повече от $m-1$ допълнителни клетки, имаме също mn клетки от m-те колони и n клетки от първия ред. Така цената не надминава

$$n(m-1)+mn+n=2mn<3n^{3/2}.$$

За долната граница, нека m е цяло и $\sqrt{n-1}-1<m\leq\sqrt{n-1}$. Нека черни са n клетки от вида $(1+im;1+jm)$: $i,j=0,1,\ldots,m$ (те са в таблицата, понеже $1+m^2\leq n$, и също така броят им е $(m+1)^2<m^2+1\leq n$). За всяка верига от черни клетки ще разглеждаме начупената линия, свързваща центровете на поредните клетки. Около всяка начална черна клетка обособяваме множеството от тези точки, до които можем да стигнем с начупена

линия с дължина не повече от $\frac{m}{2}$, съдържаща само хоризонтални и/или вертикални отсечки (тази начупена линия включва и отсечка с дължина $\frac{1}{2}$ в началната черна клетка). Тези множества за различните точки не се пресичат (единствено могат да имат общи гранични точки). За да се осъществи връзка между началните черни клетки, трябва да има верига от $\frac{1}{2}(m-1)$ черни клетки от границата на началната черна клетка до границата на съответната ѝ област (ако това число е дробно, то една от новооцветените клетки е на границата на две области и по половинка от нея се брои към всяка от двете контактуващи области). Това означава, че $f(n) \geq \frac{n}{2}(m-1) > \frac{n}{2}(\sqrt{n-1}-2)$ и остава да се уверим, че

$$\frac{1}{2}(\sqrt{n-1}-2) \geq \frac{1}{3}\sqrt{n}$$

$$3\sqrt{n-1} \geq 2\sqrt{n}+6$$

$$9n-9 \geq 4n+24\sqrt{n}+36.$$

При $n \geq 100$ това е вярно, понеже $\sqrt{n}(5\sqrt{n}-24) \geq 10(5\cdot 10-24) > 45$.

Коментар. От гореизложеното може да се направи изводът, че $\alpha = 3/2$ е единственото подходящо. Наистина, при $\alpha \neq 3/2$, за достатъчно големи n ($n > 9^{1/|\alpha-\frac{3}{2}|}$) е в сила:

- $3n^{\alpha} < \frac{1}{3}n^{3/2}$, ако $\alpha < 3/2$;
- $\frac{1}{3}n^{\alpha} > 3n^{3/2}$, ако $\alpha > 3/2$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за отговора $\alpha = 3/2$; 2 т. за доказване на горната граница (1 т. за работещо оцветяване, 1 т. за правилно пресмятане (може чрез m или подобен израз) на допълнителния брой клетки); 4 т. за доказване на долната граница (1 т. за работещо оцветяване, 3 т. за обосновка, че то работи).

Задача 3. Нека P е неконстантен полином с цели коефициенти, като старшият е равен на 1, и нека $a_1, a_2, \ldots$ е безкрайна редица от естествени числа. Да се докаже, че съществуват безбройно много прости числа, всяко от които дели поне един член на редицата

$$b_n = P(n)^{a_n} + 1.$$

Решение. Ще разгледаме отделно ситуациите, когато редицата (a_n) е неограничена и когато е ограничена.

Първи подход, неограничена. Започваме със следната:

Лема. Ако $a, k \in \mathbb{N}$, а p е просто, за което $\nu_p(a^k+1) = \alpha$, то

$$p^{\alpha} \leq (a^{p-1}-1)p^{\nu_p(k)}.$$

Доказателство. Да запишем $k = p^t b$, където $(b,p) = 1$. От Лемата за повишаване на експонентата следва, че $\alpha = t + v_p(a^b+1)$. Да отбележим, че ако d е показателят на a по модул p, то $d|2b$ и тъй като $(p, 2b) = 1$ имаме $\nu_p(a^{2b}-1) = \nu_p(a^d-1) = \nu_p(a^{p-1}-1)$. Така $\nu_p(a^b+1) \leq \nu_p(a^{p-1}-1)$ и значи $p^{\nu_p(a^b+1)} \leq a^{p-1}-1$, с което лемата е доказана.

Да допуснем, че множеството от прости числа, делящи някое b_k, е крайно и нека $p_1, p_2, \ldots, p_s$ са всички такива прости числа. От лемата следва, че

$$P(k)^{a_k}+1=\prod_{i=1}^{s} p_i^{v_{p_i}(P(k)^{a_k}+1)} \leq \prod_{i=1}^{s}\left(P(k)^{p_i-1}-1\right) p_i^{v_{p_i}(a_i)} \leq a_k P(k)^{\sum\limits_{i=1}^{s} p_i}$$

съответно $P(k)^{a_k-\sum\limits_{i=1}^{s} p_i} \leq a_k$. Понеже $P(k) \geq 2$ за всички достатъчно големи k, последното е невъзможно за достатъчно големи стойности на a_k.

Втори подход, неограничена. Да допуснем, че множеството от прости числа, делящи някое b_k, е крайно и нека $p_1, p_2, \ldots, p_s$ са всички такива прости числа. Да означим $M = \max(p_1, \ldots, p_s)$.

Твърдение 1. Ако p е нечетно просто число и $p | x^{2^n}+1$ за някое $x \in \mathbb{N}$, то $2^{n+1} | p-1$ и в частност $p > 2^n$.

Доказателство. Ако d е показателят на x по модул p, то $d | 2^{n+1}$, но d не дели 2^n, значи $d = 2^{n+1}$. От малката теорема на Ферма имаме, че d дели $p-1$, т.е. $p \equiv 1 \pmod{2^{n+1}}$ и твърдението е доказано.

Твърдение 2. Множеството $\{\nu_2(a_n) : n \in \mathbb{N}\}$ е ограничено.

Доказателство. Да отбележим, че x^2+1 не е степен на 2 за $x > 1$ поради модул 4. Следователно ако $\nu_2(a_n) > 0$ за някое $n \in \mathbb{N}$, то съществува $p \in \{p_1, \ldots, p_s\}$, което дели $P(n)^{a_n}+1$ и от Твърдение 1 следва, че $M \geq p > 2^{\nu_2(a_n)}$, с което твърдението е доказано.

Остава да отбележим, че $P(k)^{2^{\nu_2(a_k)}}+1 | P(k)^{a_k}+1$ за всяко $k \in \mathbb{N}$, откъдето чрез Твърдение 2 свеждаме задачата до ситуацията с ограничена редица.

Първи подход, ограничена. Нека $M \in \mathbb{N}$ е такова, че $a_k \leq M$ за всяко $k \in \mathbb{N}$. Нека t е такова, че $P(t) > 0$ и нека $N > \max(P(t)+1, P(t)^2+1, \ldots, P(t)^M+1)$ е достатъчно голямо. Тогава за $k = \prod\limits_{i=1}^{s} p_i^{2N} + t$ имаме, че

$$P(k)^{a_k}+1 \equiv P(t)^{a_k}+1 \pmod{p_1^N p_2^N \cdots p_s^N}.$$

Следователно $\nu_{p_i}\left(P(k)^{a_k}+1\right) \leq N$, понеже $a_k \leq M$. Последното означава, че $P(k)^{a_k}+1 \leq \prod\limits_{i=1}^{s} p_i^N < \sqrt{k}$, което води до противоречие за достатъчно голямо N.

Втори подход, ограничена. Ще използваме само, че $b_k \leq c^{k^{\varepsilon}}$ за някое $c > 1$, всяко $\varepsilon > 0$ и достатъчно големи k и че съществува константа T, такава че всяко естествено число се среща като член на редицата не повече от T пъти. Тези са изпълнени, понеже $P(n)^a+1$ са краен брой неконстантни полиноми и всеки от тях приема дадена стойност краен брой пъти; тук a пробягва ограничената съвкупност от стойности на редицата.

Нека отново $p_1, \ldots, p_s$ са всички прости числа с исканото свойство. Да запишем $b_k = \prod\limits_{i=1}^{s} p_i^{\alpha_i}$ за $\alpha_i \geq 0$. Понеже $p_i \geq 2$ за всяко i и $b_k < c^{k^{\varepsilon}} = 2^{k^{\varepsilon}\log_2 c}$ за големи k, всяко α_i не надвишава $k^{\varepsilon}\log_2 c$. Така броят различни стойности измежду $b_1, \ldots, b_m$ не надминава

$(m^{\varepsilon}\log_2 c)^s$. От друга страна, този брой е поне $\dfrac{m}{T}$. Оттук $m^{1-s\varepsilon} \leq T(\log_2 c)^s$. Ако изберем $\varepsilon < \dfrac{1}{s}$, то последното е невярно за големи m, противоречие.

Оценяване. (7 точки) 3 т. за случая на неограничена редица: 2 т. за лемата и 1 т. за довършване чрез нея или 2 т. за доказване, че $\{\nu_2(a_n) : n \in \mathbb{N}\}$ е ограничено и 1 т. за довършване чрез това; 3 т. за случая на ограничена редица; 1 т. при изцяло завършено решение.

Задачите са предложени от: 1 – Мирослав Маринов; 2 – Илияс Номан; 3 – Кристиян Василев.