Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

---

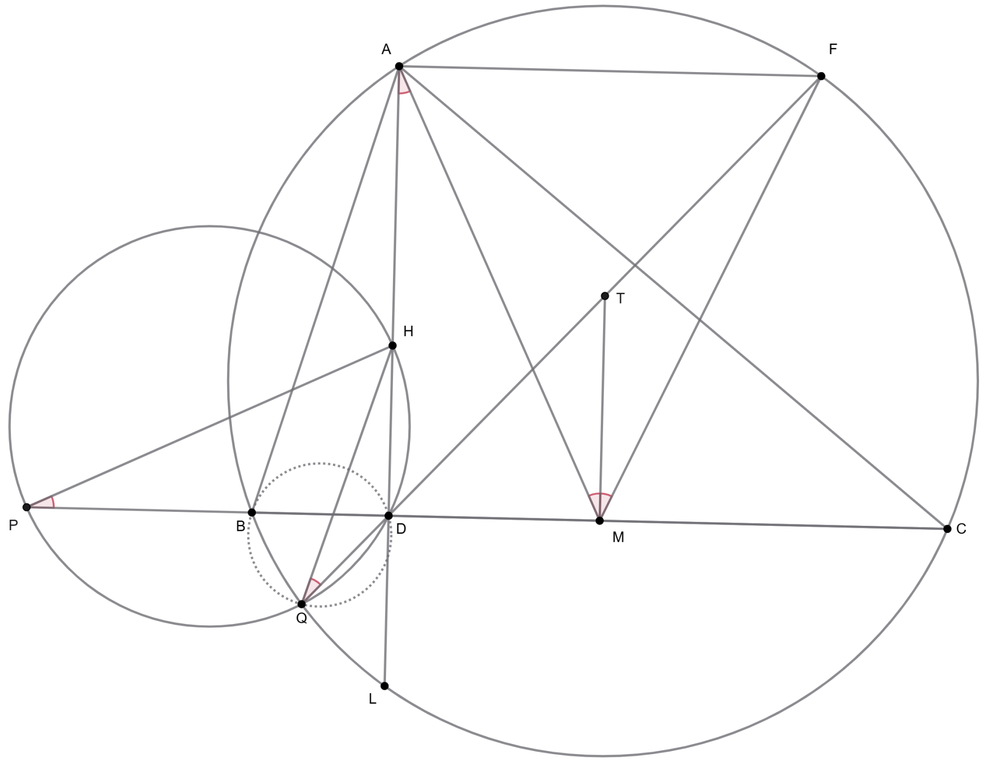
74. Национална Олимпиада по математика

Втори ден (6.4.2025), 9-12 клас

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

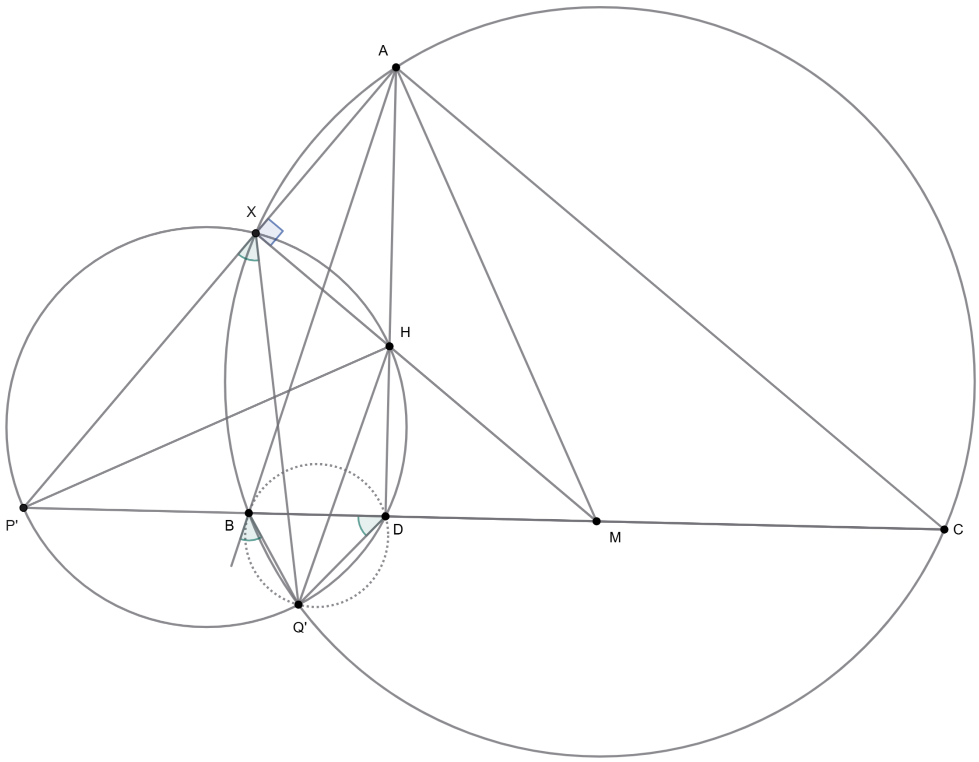
Задача 4. Даден е остроъгълен триъгълник ABC, $AB < AC$, с височина AD ($D \in BC$) и ортоцентър H. Окръжност през точки B и D се допира до правата AB и пресича описаната около $\triangle ABC$ окръжност за втори път в точка Q. Описаната около $\triangle QDH$ окръжност пресича правата BC за втори път в точка P. Да се докаже, че ако M е среда на BC, то правите MH и AP са перпендикулярни.

Решение. Първи подход. Нека QD пресича описаната около $\triangle ABC$ окръжност, да я означим с k, в т. F, а T е среда на DF. От $\measuredangle BQD = \beta$, не е трудно да се види, че F е симетрична на A относно симетралата на BC, която в случая е правата MT. Нека L е симетрична на H относно BC, $L \in k$. От $\triangle MTD \sim \triangle QDL \implies \frac{DT}{TM} = \frac{DL}{DQ} \implies \frac{FT}{TM} = \frac{HD}{DQ} \implies \triangle TMF \sim \triangle DQH$ ($\measuredangle FTM = \measuredangle HDQ$ от успоредност). От тук следва $\measuredangle TMF = \measuredangle HQD$. Сега лесно се вижда, че $PH \perp AM$, т.е. H е ортоцентър на $\triangle PMA$ и твърдението следва.



Втори подход. Нека лъчът $MH^{\to}$ пресича описаната около $\triangle ABC$ окръжност в точка X и нека $AX \cap BC = P'$. Добре известно е, че $\measuredangle MXA = 90^\circ$, откъдето следва, че точките

P', X, D и H лежат на една окръжност. Нека тази окръжност пресича описаната около $\triangle ABC$ окръжност за втори път в точката Q'. Понеже $AP' \perp MH$ е достатъчно да докажем, че $Q' \equiv Q$. От друга страна от $(P'Q'DX)$ имаме, че $\measuredangle P'XQ' = \measuredangle P'DQ'$, а от $(AXBQ')$ следва, че $\measuredangle ABQ' = 180^\circ - \measuredangle P'XQ' = 180^\circ - \measuredangle BDQ'$, т.е правата AB допира окръжността, описана около $\triangle BDQ'$ и в частност $Q' \equiv Q$.



Оценяване. (7 точки) *Първи подход.* 1 т. за въвеждане на точки F, T и L; 2 т. за доказване $\triangle MTD \sim \triangle QDL$; 3 т. за $\triangle TMF \sim DQH$; 1 т. за довършване.
Втори подход. 1 т. за $\measuredangle MXA = 90^\circ$; 3 т. за предефиниране на задачата и свеждането ѝ до $Q' \equiv Q$; 3 т. за довършване.

Задача 5. Казваме, че естественото число m е *свободно от квадрати*, ако не съществува естествено число $d > 1$, за което d^2 дели m. Нека n е естествено число. Да се докаже, че съществува естествено число a, за което множеството $\{a+1, a+2, \ldots, a+n\}$ съдържа точно $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ числа, свободни от квадрати.

Решение. За $x \in \mathbb{N}_0$ нека $f(x)$ е броят числа, свободни от квадрати, в интервала $[x+1, x+n]$. Първо ще докажем, че за всяко естествено число n е в сила неравенството $f(0) > \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$. Наистина, ако едно число $m \leq n$ не е свободно от квадрати, то съществува естествено число $d \geq 2$, за което d^2 дели m. Следователно броят на числата, по-малки от n, които не са свободни от квадрати, е най-много

$$\sum_{d=2}^{\infty}\left\lfloor\frac{n}{d^2}\right\rfloor \le \sum_{d=2}^{\infty}\frac{n}{d^2} \le n\left(\frac{1}{4}+\sum_{d=3}^{\infty}\frac{1}{d^2}\right) < n\left(\frac{1}{4}+\sum_{d=3}^{\infty}\frac{1}{d(d-1)}\right)=\frac{3n}{4}.$$

Следователно $f(0) > n - \dfrac{3n}{4} = \dfrac{n}{4}$.

Сега ще докажем, че съществува $m \in \mathbb{N}$, за което $f(m)=0$. Нека $p_1, p_2, \ldots, p_n$ са различни прости числа. Тогава от Китайската теорема за остатъците съществува естествено число m, за което $m + i \equiv 0 \pmod{p_i^2}$ за $i = 1, 2, \ldots, n$. Така за този избор на m имаме $f(m) = 0$.

Остава да отбележим, че $f(x+1) - f(x) \in \{-1, 0, 1\}$ за всяко $x \in \mathbb{N}_0$. Оттук тъй като $f(0) > \left\lfloor\dfrac{n}{4}\right\rfloor$ и $f(m) = 0 < \left\lfloor\dfrac{n}{4}\right\rfloor$, то съществува $a \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$, за което $f(a) = \left\lfloor\dfrac{n}{4}\right\rfloor$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за $|f(n+1) - f(n)| \le 1$; 2 т. за $f(0) > n/4$; 2 т. за намиране на m, за което $f(m) = 0$; 2 т. за довършване.

Задача 6. Нека $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ са $n \ge 2$ дадени точки в равнината и $r > 0$ е реално число. Ани и Боби играят следната игра: Ани построява свързан граф с върхове в точките $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$, т.е. свързва някои от точките с ребра, така че от всяка от дадените точки да може да се стигне до всяка друга, движейки се по ребра. След това Ани записва във всеки връх X_i неотрицателно реално число r_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, така че $\sum_{i=0}^{n-1} r_i = 1$. Боби избира различни върхове $X_{i_0} = X_0, X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}$ така че X_{i_j} и $X_{i_{j+1}}$ са свързани с ребро за всяко $j = 0, 1, \ldots, k-1$. Боби печели, ако $\dfrac{1}{k+1}\displaystyle\sum_{j=0}^{k} r_{i_j} \ge r$; в противен случай печели Ани. В зависимост от n, определете най-голямото възможно r, за което Боби има печеливша стратегия.

Отговор. $r = \begin{cases} \frac{4}{(n+1)^2}, & \text{ако } n \text{ е нечетно,} \\ \frac{4}{n(n+2)}, & \text{ако } n \text{ е четно.} \end{cases}$

Решение. Първи подход (Иля Богданов). Ако Ани замени графа с някое от неговите покриващи дървета, това ще намали опциите на Боби за избор на пътища в графа, затова приемаме, че тя построява дърво с корен в X_0 върху дадените точки.

Сега, да приемем че тя е построила дърво и е присвоила числа r_i на върховете съгласно изискванията. Ще покажем как да променим тези числа така, че задачата на Боби да не стане по-лесна.

Нека разгледаме всяко листо X_i, при $i > 0$, и му присвоим сумата от числата по пътя от X_0 до X_i; като заменим всички останали числа с нули. Тогава сумата на Боби по всеки път с начало X_0 не се увеличава. От друга страна, сумата на числата не намалява. Ако е нужно, после Ани намалява числата при листата, така че да изпълни условията за сумата.

Задачата вече се поставя така: Нека е дадено дърво с n върха и корен в X_0. Нека $L_1, \ldots, L_k$ са листата на това дърво, различни от корена, и нека d_i е броят на върховете по пътя от X_0 до L_i. Трябва да изберем неотрицателни числа $s_1, \ldots, s_k$, чиято сума е 1, така че да минимизираме величината

$$r = \max_{1 \le i \le k} \frac{s_i}{d_i}.$$

Нека $d = \max_i d_i$. Без да губим общност, ще считаме, че $d = d_1$. Тогава пътят от X_0 до L_1 съдържа $d-1$ върха, различни от тези на L_i, така че $k \leq n-(d-1)$. Следователно

$$r \geq \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{s_i}{d_i} \geq \frac{1}{dk}\sum_{i=1}^{k}s_i = \frac{1}{dk} \geq \frac{1}{d(n-d+1)} \geq \frac{1}{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor\cdot\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil}.$$

Равенството се достига, ако $d = \left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil$, и графът се състои от път с дължина $d-1$, като единият му край е X_0, а към другия край са свързани $n-d+1 = \left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor$ листа. На всяко от тези листа трябва да се присвои числото $1/(n-d+1)$, а на всички останали върхове да се присвоят нули.

Втори подход. Ани построява свързан граф G върху върховете $V = \{X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}\}$. Обърнете внимание, че премахването на всяко ребро, което оставя G свързан, намалява опциите на Боби за избор на път. Следователно, приемаме, че Ани изгражда покриващо дърво върху V. Нека означим с T едно такова дърво върху V, с корен в $v_0 = X_0$. Нека $f : V \to [0,1]$ е функция, която удовлетворява $\sum_{v\in V} f(v) = 1$. За всеки път P в T да означим:

$$A(f,P) = \frac{1}{|V(P)|}\sum_{v\in V(P)} f(v).$$

Нека u бъде връх от V, който не е листо в T, и u' бъде листо на T, такова че u да лежи на пътя от v_0 до u'. Дефинираме $f' : V \to [0,1]$ като функция, която съвпада с f във всички върхове, освен в u и u', като $f'(u) = 0$ и $f'(u') = f(u') + f(u)$. Обърнете внимание, че $A(f',P) \leq A(f,P)$ за всеки път P. Това означава, че Ани може да разглежда само тези функции f, които приемат стойност 0 във върховете, които не са листа. По същия начин може да приемем, че $f(v_0) = 0$.

Нека $L(T)$ бъде множеството от листата на T (приемаме, че $v_0 \notin L(T)$). За всяко $u \in L(T)$ да означим с $p(u)$ броя на върховете на пътя от v_0 до u. Трябва да минимизираме

$$M(f,T) := \max\left\{\frac{f(u)}{p(u)} : u \in L(T)\right\} \tag{1}$$

по всички $f : L(V) \to [0,1]$ с условието $\sum_u f(u) = 1$.

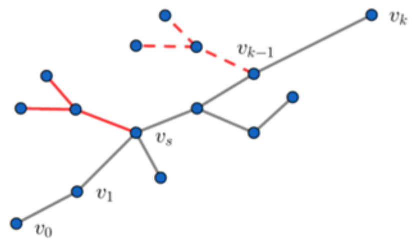
Тези функции формират затворено множество в компактното пространство $[0,1]^{L(V)}$, така че те формират компактно множество. Тъй като M зависи непрекъснато от f, минимумът се достига при някоя функция f. Ако $\frac{f(u_1)}{p(u_1)} > \frac{f(u_2)}{p(u_2)}$ за някои $u_1, u_2 \in L(T)$, можем да построим функция f_0 така, че $M(f_0,T) < M(f,T)$, като намалим $f(u_1)$ с подходяща стойност и увеличим $f(u_2)$ със същата стойност. Следователно, за функцията f, която минимизира (1), стойността $\frac{f(u)}{p(u)}$ трябва да е една и съща за всички $u \in L(T)$. Така получаваме:

$$f(u) = \begin{cases} \frac{p(u)}{\sum_{v\in L(T)} p(v)} & \text{ако } u \in L(T) \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

което дава

$$m(T) := \min_f M(f,T) = \frac{1}{\sum_{v\in L(T)} p(v)}. \tag{2}$$

Остава да изчислим $m := \min\limits_T m(T)$, тоест да посочим покриващо дърво T върху V, с корен в v_0, за което $\sum\limits_{v\in L(T)} p(v)$ да е максимално възможно. Нека T минимизира (2), и нека $P := v_0v_2\ldots v_k$ бъде най-дългият път в T. Ако някой връх от $v_0, v_1, \ldots, v_{k-2}$, да кажем v_s, е инцидентен с ребро, което не принадлежи на P, можем да вземем поддървото, с корен в v_s, което не съдържа ребра от P, и да го преместим в v_{k-1} (вижте фигурата).



Резултатът е дърво T' с $m(T') < m(T)$, което противоречи на избора на T. Следователно, $\deg_T v_0 = 1$ и $\deg_T(v_i) = 2$, за $i = 1, 2, \ldots, k-2$. Тъй като P е най-дългият път, то v_{k-1} е свързан с всички останали върхове от V, които не са в $\{v_0, \ldots, v_{k-1}\}$. От тук:

$$m(T) = \frac{1}{\sum_{v\in L(T)} p(v)} = \frac{1}{(n-k)(k+1)}.$$

Лесно се вижда, че $m(T)$ достига своя минимум при $k = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ и тази стойност е

$$m(n) = \begin{cases} \frac{4}{(n+1)^2} & \text{ако } n \text{ е нечетно,} \\ \frac{4}{n(n+2)} & \text{ако } n \text{ е четно.} \end{cases}$$

В заключение, най-малката възможна стойност на $M(f, T)$, която Ани може да постигне, е $m(n)$. Следователно, Боби печели, тогава и само тогава, когато $r \le m(n)$, а най-голямото такова r е $r = m(n)$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за показване, че построеният граф трябва да е дърво; 1 т. за доказване, че ненулевите числа трябва да са в листата на дървото; 2 т. за доказване, че дървото, минимизиращо максималната усреднена величина, е път, в който последният връх е свързан с всички останали листа; 3 т. за довършване.

Задачите са предложени от:
4 – Александър Иванов; 5 – Кристиян Василев; 6 – Драгомир Грозев.