<u>Министерство на образованието и науката</u>

75. Национална олимпиада по математика

Национален кръг, 3. – 6. април 2026 г.

ТЕМА ЗА 7. КЛАС

Задача 1. а) Представете

$$M = 9y(x-y)(x+y)^2 - xy(3x^2+11xy-22y^2) + x(x-y)(x^2-xy+y^2)$$

като произведение на два многочлена от втора степен.

б) Намерете всички двойки цели числа $(x; y)$, за които стойността на M е равна на 1961.

Решение. а) Привеждаме M в нормален вид:

$$M = x^4 + 4x^3y + 12xy^3 - 9y^4.$$

Разлагаме M на множители:

$$M = (x^2-3y^2)(x^2+3y^2) + 4xy(x^2+3y^2) = (x^2+3y^2)(x^2-3y^2+4xy).$$

б) Уравнението е

$$(x^2+3y^2)(x^2-3y^2+4xy) = 37.53.$$

Понеже $x^2+3y^2 \geqq 0$ и $x^2+3y^2 \equiv 0$ или $1 \pmod 3$, а $53 \equiv 2 \pmod 3$ и $1961 \equiv 2 \pmod 3$, то всички възможности са:

$$(x^2+3y^2; x^2-3y^2+4xy) \in \{(1;\ 1961),\ (37;\ 53)\}.$$

Случай 1: $(x^2+3y^2;\ x^2-3y^2+4xy) = (1;\ 1961)$

Целочислените решения на $x^2+3y^2 = 1$ са само $(x; y) = (\pm 1;\ 0)$ и не удовлетворяват равенството $x^2-3y^2+4xy = 1961$; в този случай няма решение.

Случай 2: $(x^2+3y^2;\ x^2-3y^2+4xy) = (37;\ 53)$

От равенството $x^2+3y^2 = 37$ следва, че $3y^2 \leqq 37$, т.е. y^2 може да е 1, 4, 9. Целочислено решение за x се получава само при $y^2 = 4$; тогава $x^2 = 25$. От второто уравнение $x^2-3y^2+4xy = 53$ намираме $xy = 10$. Получаваме решенията $(x;\ y) = (5;\ 2)$ и $(x;\ y) = (-5;\ -2)$.

Оценяване. а) общо 2 точки: за нормален вид – 1 точка, за разлагане – 1 точка; б) общо 5 точки; за случай 1. – 0,5 точки, за случай 2. – 1,5 точки, за отхвърляне на останалите два случая – 3 точки.

Задача 2. В $\triangle ABC$ е дадено, че $\sphericalangle ABC : \sphericalangle BAC : \sphericalangle ACB = 1 : 3 : 4$. Ъглополовящата CL ($L \in AB$) на $\sphericalangle ACB$ пресича симетралата на AB в точка E, а точките D, F и M са среди съответно на AL, BE и BC.

а) Намерете ъглите на $\triangle DMF$.

б) Докажете, че

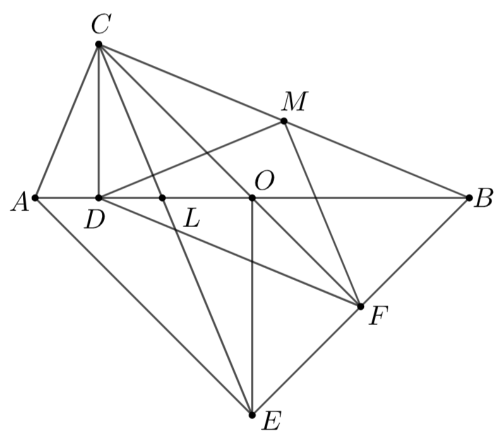
$$S_{AEBC} = \left(\frac{AC + BC}{2}\right)^2 = 4S_{DMF}.$$

Решение. Нека $\sphericalangle ABC = \beta$. В $\triangle ABC$ намираме $\sphericalangle A = 3\beta$, $\sphericalangle C = 4\beta$, $8\beta = 180°$, откъдето $\sphericalangle C = 4\beta = 90°$; $2\beta = 45°$.

Нека O е средата на хипотенузата AB; имаме $AO = BO = CO$, $\sphericalangle OCB = \sphericalangle OBC = \beta$. Последователно изразяваме

$\sphericalangle ECO = \sphericalangle LCB - \sphericalangle OCB = 2\beta - \beta = \beta$,

$\sphericalangle ALC = \sphericalangle LCB + \sphericalangle LBC = 3\beta$, т.е. $\sphericalangle ALC = \sphericalangle LAC$, което означава, че $\triangle ALC$ е равнобедрен и медианата CD е височина и ъглополовяща, т.е. $CD \perp AB$ и $\sphericalangle ACD = \sphericalangle DCL = \beta$.



Тъй като $\sphericalangle OLE = \sphericalangle ALC = 3\beta$, от правоъгълния триъгълник OLE намираме $\sphericalangle LEO = \beta$. Така получаваме, че $\triangle EOC \cong BOC$ по втори признак, следователно $CE = CB$. В равнобедрения $\triangle ECB$ лъчът CO е ъглополовяща $\sphericalangle ECB$, следователно $F \in CO$ и $OF \perp BE$.

В правоъгълния $\triangle BCF$ медианата към хипотенузата е $MF = BM = CM$ и имаме $\sphericalangle BMF = 2\sphericalangle FCB = 2\beta$.

В правоъгълния $\triangle BCD$ медианата към хипотенузата е $DM = BM = CM$ и имаме $\sphericalangle CMD = 2\sphericalangle CBD = 2\beta$.

Така намираме, че $\triangle MDF$ е равнобедрен и

$$\sphericalangle DMF = 180° - \sphericalangle CMD - \sphericalangle BMF = 180° - 4\beta = 90°,$$

т.е. $\triangle MDF$ е равнобедрен правоъгълен с ъгли $90°, 45°, 45°$.

б) От $E \in s_{AB}$ следва $EA = EB$, т.е. $\triangle ABE$ е равнобедрен. Но $\triangle EOC \cong BOC$, следователно $EO = BO$, т.е. в триъгълника ABE медианата $OE = \dfrac{1}{2}AB$, следователно $\triangle ABE$ е правоъгълен. Тогава лицето на правоъгълния равнобедрен триъгълник ABE е

$$S_{ABE} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot EO = \frac{1}{4} \cdot AB^2 = \frac{1}{4}(AC^2 + BC^2).$$

Така получаваме

$$S_{AEBC} = S_{ABC} + S_{ABE} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC + \frac{1}{4}(AC^2 + BC^2) = \left(\frac{AC + BC}{2}\right)^2.$$

Като използваме свойството на медианата, последователно получаваме

$$S_{DEF} = \frac{1}{2}S_{DEB},\ S_{CDM} = \frac{1}{2}S_{CDB} \Longrightarrow S_{DEF} + S_{CDM} = \frac{1}{2}S_{CBED};$$

$$S_{MBF} = \frac{1}{2}S_{CFB} = \frac{1}{4}S_{CBE};$$

$$S_{ADC} = S_{DCL},\ S_{ADE} = S_{DLE} \Longrightarrow S_{ADC} + S_{ADE} = S_{DCE}.$$

Тогава

$$\begin{gathered} 4S_{DMF} = 4(S_{CBED} - (S_{CDM} + S_{DEF}) - S_{BMF}) = \\ = 4(S_{CBED} - \frac{1}{2}S_{CEBD} - \frac{1}{4}S_{CBE}) = 2S_{CBED} - S_{CBE} = \\ = S_{CBED} + (S_{CBED} - S_{CBE}) = S_{CBED} + S_{DCE} = \\ = S_{CBED} + S_{ADC} + S_{ADE} = S_{AEBC}. \end{gathered}$$

Второ решение. Както в горното решение доказваме, че $\triangle ABE$ е правоъгълен и равнобедрен. Да означим лицето на $\triangle AOE$ и на еднаквия с него $\triangle BOE$ с x, а лицето на $\triangle COE$ и на еднаквия с него $\triangle BOC$ с y.

От $CO || AE$ ($\sphericalangle EAO = \sphericalangle COA = 45^\circ$) следва, че лицето на $\triangle ACE$ е равно на лицето на $\triangle AOE$, което е x. Тогава

$$S_{AEBC} = S_{ACE} + S_{COE} + S_{BOE} + S_{BOC} = 2(x + y).$$

От $CD || OE$ (перпендикуляри към AB) следва, че $S_{DOE} = S_{COE} = y$.

От еднаквостта на триъгълниците CDB и BFC следва, че височините в тези триъгълници към общата страна BC са равни, т.е. $DF || BC$. Тогава

$$S_{MDF} = S_{BDF} = \frac{1}{2}S_{BDE} = \frac{1}{2}(S_{BOE} + S_{DOE}) = \frac{1}{2}(x + y) = \frac{1}{4}S_{AEBC},$$

като използвахме, че медианата DF разполовява лицето на $\triangle BDE$.

Оценяване. а) общо 3 точки; за коказателство, че триъгълникът е правоъгълен – 1 точка, че е равнобедрен – 2 точки;

б) общо 4 точки; за доказателство, че $S_{AEBC} = \left(\frac{AC + BC}{2}\right)^2$ – 1 точка, за $S_{AEBC} = 4S_{DMF}$– 3 точки.

Задача 3. Градинар разделил квадратна градина на квадратна мрежа 9×9, за да засади n лалета и $(81-n)$ нарциса така, че във всяко поле на квадратната мрежа да има точно едно цвете.

Едно лале цъфти, ако в реда, в който се намира, броят на лалетата е по-голям от броя на нарцисите. Един нарцис цъфти, ако в колоната, в която се намира, броят на нарцисите е по-голям от броя на лалетата.

а) Докажете, че както и градинарят да избере n и както и да подреди цветята в градината, поне 17 от тях ще цъфтят. Посочете пример, при който точно 17 цветя цъфтят.

б) Да се намерят всички стойности на n, за които е възможно така да се засадят цветята, че всички да цъфтят.

Решение. Лалетата цъфтят по редове – или всички лалета в реда цъфтят, или всички не цъфтят. Едно лале цъфти тогава и само тогава, когато в неговия ред има поне 5 лалета. Тогава в реда цъфтят поне 5 лалета. Ще наричаме такъв ред цъфнал. Да означим броя на цъфналите редове с a.

По същия начин, нарцисите цъфтят по стълбове. Един нарцис в цъфти тогава и само тогава, когато в стълба му има поне 5 нарциса. Тогава в стълба цъфтят поне 5 нарциса. Ще наричаме такъв стълб цъфнал; нека броят на цъфналите стълбове е b.

а) Ще използваме следните наблюдения: ако точно a реда са цъфнали, то във всеки от останалите $9-a$ реда има най-много по 4 лалета, откъдето

$$n \leqq 9a + 4(9-a) \iff n \leqq 5a + 36 \iff a \geqq \frac{n-36}{5}.$$

Като следствие от тук имаме:

– ако $n \geqq 37$, то $a \geqq 1$, т.е. има поне един цъфнал ред;

– ако $n \geqq 42$, то $a \geqq 2$, т.е. има поне два цъфнали реда.

Аналогично разсъждаваме за цъфналите стълбове и получаваме

$$b \geqq \frac{(81-n)-36}{5} = \frac{45-n}{5}.$$

Общият брой на цъфналите редове и стълбове е

$$a + b \geqq \frac{n-36}{5} + \frac{45-n}{5} = \frac{9}{5} \Longrightarrow a + b \geqq 2.$$

Нецъфтящите редове са $9-a$ и в тях има най-много $4(9-a)$ лалета, следователно цъфтящите лалета са поне $n - 4(9-a)$. Аналогично цъфтящите нарциси са поне $81 - n - 4(9-b)$. Цъфтящите цветя са поне

$$n - 4(9-a) + 81 - n - 4(9-b) = 9 + 4(a+b) \geqq 9 + 4.2 = 17.$$

Пример със 17 цъфнали цветя (в първия ред и първия стълб) е показан в таблицата.

н	л	л	л	л	л	л	л	л
н	л	л	л	л	н	н	н	н
н	н	л	л	л	л	н	н	н
н	н	н	л	л	л	л	н	н
н	н	н	н	л	л	л	л	н
н	н	н	н	н	л	л	л	л
н	л	н	н	н	н	л	л	л
н	л	л	н	н	н	н	л	л
н	л	л	л	н	н	н	н	л

Второ решение. Ако $a + b \geqq 4$, получаваме поне $4.5 = 20$ цъфнали цветя. За да докажем, че минималният възможен брой цъфнали цветя е 17, ще разгледаме само случаите с $a + b = 2$ и $a + b = 3$.

Без ограничение може да приемем, че лалетата са повече от нарцисите, т.е. $n \geqq 41$.

1) Нека $n = 41$, нарцисите са 40; $a \geqq 1$, $b \geqq 1$.

Ако $a = b = 1$, в единствения цъфнал ред има поне $41 - 8.4 = 9$ лалета, а в единствения цъфнал стълб има поне $40 - 8.4 = 8$ нарциса; общо цъфналите цветя са поне $9 + 8 = 17$.

Ако $a = 2$, $b = 1$, в двата цъфнали реда има поне $41 - 7.4 = 13$ лалета, а в единствения цъфнал стълб има поне $40 - 8.4 = 8$ нарциса; общо цъфналите цветя са поне $13 + 8 = 21$.

Ако $a = 1$, $b = 2$, аналогично получаваме поне $(41 - 8.4) + (40 - 7.4) = 9 + 12 = 21$ цъфнали цветя.

2) Нека $n = 42$, 43 или 44; нарцисите са съответно 39, 38 или 37. Тогава $a \geqq 2$, $b \geqq 1$.

При $a = 2$, $b = 1$, в двата цъфнали реда има поне $n - 7.4 = n - 28$ лалета, а в единствения цъфнал стълб има поне $(81 - n) - 8.4 = 49 - n$ нарциса; общо цъфналите цветя са поне $n - 28 + 49 - n = 21$.

3) Нека $n = 45$, нарцисите са 36. Тогава $a \geqq 2$.

При $a = 2$ в двата цъфнали реда има поне $45 - 7.4 = 17$ лалета. При $a = 3$ в трите цъфнали реда има поне $45 - 6.4 = 21$ лалета.

Когато $n > 45$, броят цъфнали лалета се увеличава. Следователно минималният брой цъфнали цветя е поне 17.

Друг пример със 17 цъфнали цветя (в първите два реда) е:

л	л	л	л	л	л	л	л	л
н	л	л	л	л	л	л	л	л
л	н	н	н	н	н	л	л	л
н	н	н	н	л	л	л	л	н
н	н	н	л	н	л	л	л	н
н	н	л	л	л	л	н	н	н
л	л	н	н	л	н	н	н	л
л	л	л	л	н	н	н	н	н
л	л	л	н	н	н	н	н	л

б) При $n = 0$ или $n = 81$ са засадени цветя само от един вид и те цъфтят.

При $1 \leqq n \leqq 4$ лалетата не са достатъчни за цъфнал ред и не цъфтят; при $1 \leqq 81 - n \leqq 4$, т.е. $77 \leqq n \leqq 80$, няма цъфнал ред с нарциси.

Остава да разгледаме $5 \leqq n \leqq 76$. Когато $5 \leqq n \leqq 36$, ще покажем разположение на n лалета, при което всички цветя цъфтят.

Нека $n = 9k + r$, където $r = 0, 1, \ldots, 8$.

– При $k = 0$ засаждаме всички $n \geqq 5$ лалета в един ред;

– При $r = 0$ засаждаме лалетата в $k \leqq 4$ реда;

– При $k > 0$, $r > 0$ имаме $10 \leqq n \leqq 35$ и тогава $1 \leqq k \leqq 3$. Запълваме с лалета първите $k - 1$ реда.

Ако $9 + r = 2a$, на k-ия и $(k+1)$-ия засаждаме съответно по a лалета. Това е възможно, тъй като $17 \geqq 9 + r \geqq 10$, следователно $8 \geqq a \geqq 5$.

Ако $9 + r = 2a + 1$, на k-ия и $(k+1)$-ия засаждаме съответно a и $a + 1$ лалета. Това е възможно, тъй като $8 \geqq a \geqq 5$ и $9 \geqq a + 1 \geqq 6$.

Така всички лалета цъфтят; във всеки стълб има не повече от 4 лалета и всички нарциси цъфтят.

Ако разсъждаваме симетрично за нарцисите, ще получим пример за цъфтяща градина при $5 \leqq 81 - n \leqq 36$, т.е. $45 \leqq n \leqq 76$.

В оставащите случаи, $37 \leqq n \leqq 44$, ще докажем, че няма начин така да се засадят цветята, че всички да цъфтят. В този случай броят на нарцисите е $37 \leqq 81 - n \leqq 44$. Да допуснем, че е възможно да цъфнат всички цветя. За да цъфтят всички лалета, във всеки ред трябва да има или 0, или поне 5 лалета. Тъй като $n \leqq 44$, не е възможно във всичките 9 реда да има поне по 5 лалета. Следователно има поне един ред с 0 лалета. В този ред има 9 нарциса, които за да цъфтят, трябва във всеки стълб да има поне по 5 нарциса. Тогава нарцисите са поне 45, противоречие.

Търсените стойности са $n \in \{0, 5, 6, \ldots, 36, 45, 46, \ldots, 76, 81\}$.

Оценяване. а) общо 4 точки: пример за 17 цъфтящи цветя – 1 точка; доказателство, че поне 17 цветя цъфтят – 3 точки.

б) Общо 3 точки: конструктивно доказателство, че при $5 \leqq n \leqq 36$ и $45 \leqq n \leqq 76$ може да се засадят така цветята, че да цъфтят – 1 точка; доказателство, че при $37 \leqq n \leqq 44$ няма начин всички цветя да цъфтят – 2 точки. Разглеждането само на случаите за n от 0 до 4 и от 77 до 81 не носи точки. Верни разсъждения, подобни на изброените по-долу, носят от 0,5 до 1 точки (еднократно):

– Общият брой на цветята е нечетен, значи от единия вид има повече цветя и нека това са лалетата. Тогава има поне един ред, на който лалетата са повече от нарцисите, и този ред цъфти.

– Ако няма цъфнал ред, то във всеки ред има най-много 4 лалета и лалетата са най-много 36. Тогава нарцисите са най-малко 45 и има стълб с поне 5 нарциса; този стълб цъфти.

– Ако има само един цъфнал ред и няма цъфтящи стълбове, във всеки от останалите редове има най-много 4 лалета и лалета са най-много $9 + 8.4 = 41$. Щом няма цъфтящи стълбове, във всеки стълб има поне 5 лалета, т.е. лалетата са най-малко 45; противоречие.