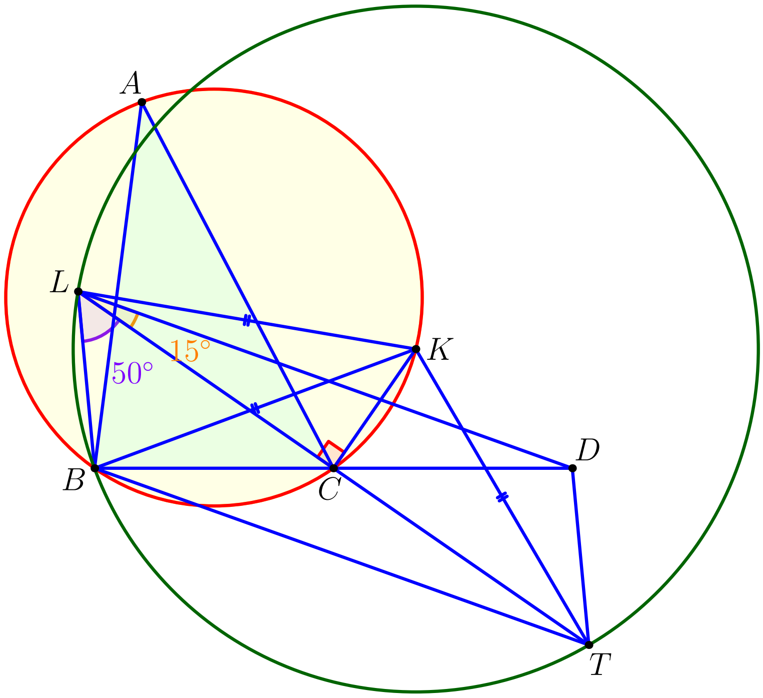
Национален кръг на 75 национална олимпиада по математика, 03-06.04.2026
Алтернативно решение на задача 8.1

Задача 8.1 Даден е остроъгълен триъгълник ABC. Точката $D \neq B$ върху правата BC е такава че $BC = CD$. Нека K е точка от дъгата $\widehat{AC}$, несъдържаща B, на описаната около ABC окръжност. Правата през C, перпендикулярна на CK, пресича окръжността с център K и радиус KB в точка L, като четириъгълникът $ALBC$ е изпъкнал. Ако $\angle BLC = 50^\circ$ и $\angle CLD = 15^\circ$, да се намери големината на $\angle BAC$.

Решение. Удвояваме медианата LC в триъгълника BLD до точка T, съответно $BLDT$ е успоредник.



Явно KC е височина и медиана в триъгълника KLT, значи $KL = KT$, т.е. T лежи на упоменатата в условието окръжност с център K и радиус KB. Тази окръжност дава $\angle BKT = 2\angle BLT = \angle 2\angle BLC = 100^\circ$. От успоредника $BLDT$ имаме $\angle BTL = \angle DLT = \angle DLC = 15^\circ$, а от $KB = KT$ следва $\angle KTB = 40^\circ$, значи $\angle KLT = \angle KTL = \angle KTB - \angle BTL = 25^\circ$. Оттук $\angle BLK = \angle BLC + \angle CLK = 75^\circ$, $\angle BKL = 30^\circ$ от $KB = KL$, $\angle CKL = 90^\circ - \angle CLK = 65^\circ$ и $\angle BAC = \angle BKC = \angle CKL - \angle BKL = 35^\circ$.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за въвеждането на T и $KL = KT$, 1 т. за $\angle BKT = 100^\circ$, 2 т. за $\angle KLT = \angle KTL = 25^\circ$, 1 т. за $\angle BKL = 30^\circ$, 1 т. за $\angle BAC = \angle CKL - \angle BKL$ и окончателен отговор.