Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

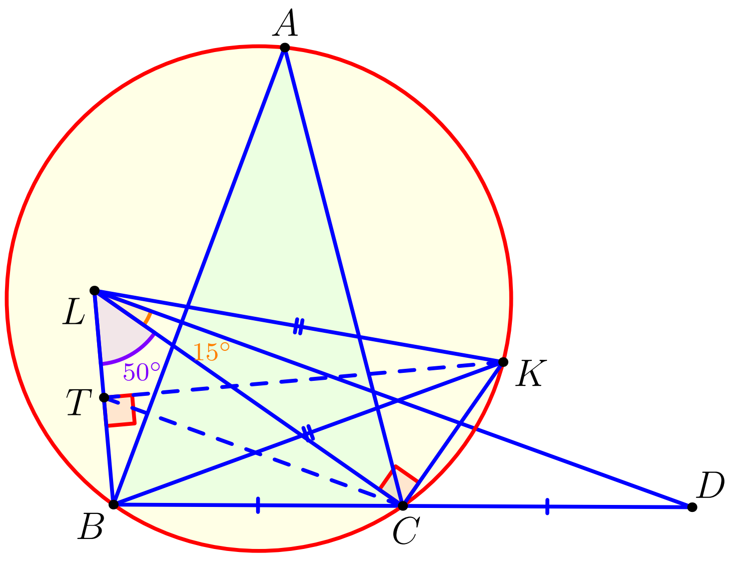
75. Национална олимпиада по математика

8 клас: условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 8.1 Даден е остроъгълен триъгълник ABC. Точката $D \neq B$ върху правата BC е такава че $BC = CD$. Нека K е точка от дъгата $\widehat{AC}$, несъдържаща B, на описаната около ABC окръжност. Правата през C, перпендикулярна на CK, пресича окръжността с център K и радиус KB в точка L, като четириъгълникът $ALBC$ е изпъкнал. Ако $\angle BLC = 50°$ и $\angle CLD = 15°$, да се намери големината на $\angle BAC$.

Отговор. $35°$

Решение. Нека T е средата на BL. От средната отсечка CT в триъгълника BDL имаме $\angle CLD = \angle LCT$, а от $KB = KL$ следва $\angle KTL = 90°$. Оттук четириъгълникът $CKLT$ е вписан.



Сега пресмятаме

$$\angle BAC = \angle BKC = \angle CKT - \angle BKT = \angle BLC - \angle LKT$$
$$= \angle BLC - \angle LCT = \angle BLC - \angle CLD = 35°.$$

Оценяване. (7 точки) 2 т. за въвеждането на T и обосновка на $\angle DLC = \angle LCT$, 2 т. за доказване, че $CKLT$ е вписан, 3 т. за получаване на $\angle BAC =$

$\angle BLC - \angle DLC$, от които 1 т. за $\angle BAC = \angle BLC - \angle LKT$, 1 т. за $\angle BAC = \angle BLC - \angle LCT$ (или подобно изразяване, което не включва K) и 1 т. за довършване и окончателен отговор.

Задача 8.2 За просто число p означаваме

$$A_p = p^{1000} + p^{999} + p^{998} + \cdots + p^2 + p.$$

Да се намерят всички прости числа p, такива че p дели

$$(A_p + 20)^{A_p - 997} + (A_p + 26)^{A_p - 997}.$$

Отговор. 2, 23, 139

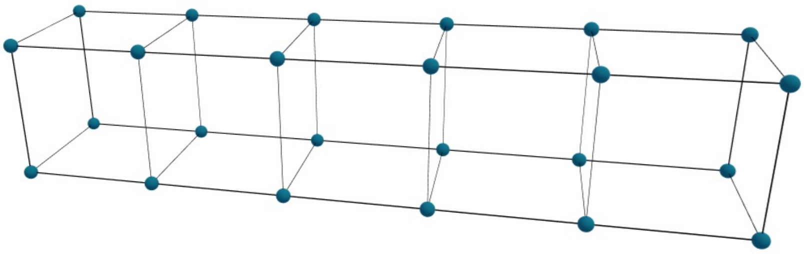
Решение. Всяко от събираемите в A_p дава остатък 0 при деление на p и остатък 1 при деление на $p-1$, понеже от $p \equiv 1 \pmod{p-1}$ следва $p^t \equiv 1 \pmod{p-1}$ за всяко $t \geq 1$. Оттук следва, че $A_p \equiv 0 \pmod{p}$ и $A_p - 997 \equiv 3 \pmod{p-1}$. За всяко естествено число a имаме от малката теорема на Ферма, че $a^{1+k(p-1)} \equiv a \pmod{p}$ за $k \geq 1$, значи $a^{3+k(p-1)} \equiv a^3 \pmod{p}$ и $a^{A_p-997} \equiv a^{1000-997} = a^3 \pmod{p}$. Така за основния израз имаме по модул p

$$(A_p + 20)^{A_p - 997} + (A_p + 26)^{A_p - 997} \equiv 20^{A_p - 997} + 26^{A_p - 997} \equiv 20^3 + 26^3$$

и остава да намерим простите делители на $20^3 + 26^3 = 2^3(10^3 + 13^3)$. Разлагаме по формулата за сбор на два куба: $10^3 + 13^3 = (10 + 13) \cdot (10^2 - 10 \cdot 13 + 13^2) = 23 \cdot 139$ и окончателно търсените числа са $2, 23, 139$. (Проверка за делимост на просто число до $\left\lfloor \sqrt{139} \right\rfloor = 11$ показва, че 139 наистина е просто.)

Оценяване. (7 точки) 4 т. за свеждане до намиране на простите делители на $20^3 + 26^3$ (от които 0 т. за свеждане до $20^{A_p-997} + 26^{A_p-997}$, 2 т. за доказване на $A_p \equiv 1000 \pmod{p-1}$ и 2 т. за довършване чрез малката теорема на Ферма), 1 т. за изнасяне на максимално възможна степен на двойката, 1 т. за разлагане чрез формулата за сбор на кубове, 1 т. за верен отговор. Не се отнемат точки при липса на доказателство, че конкретно число е просто, стига то наистина да е такова.

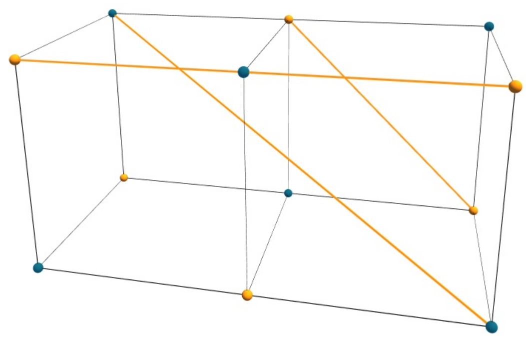
Задача 8.3 Нека n е естествено число. В редица са долепени едно до друго n кубчета, така че да образуват паралелепипед $1 \times 1 \times n$. Във всеки връх на получената мрежа е поставена точка. (На фигурата е показан пример за $n = 5$.) Да се намерят всички n, за които е възможно точките да се разделят на двойки, така че ако между всяка двойка се прекара отсечка, то получените отсечки са с различни дължини.

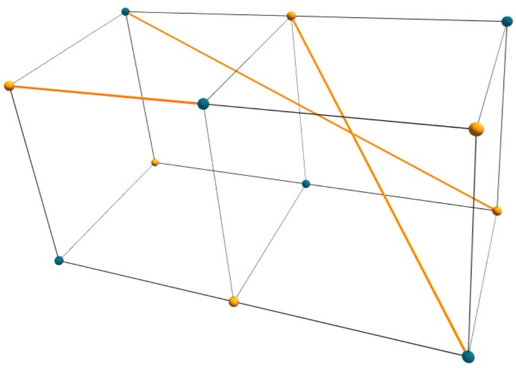


Отговор. Всяко $n \geq 3$

Решение. При $n = 1$ има само три възможни дължини на отсечки – 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$. Тъй като броят на отсечките е 4, то със сигурност ще има две с равна дължина.

При $n = 2$ има само 6 възможни дължини за отсечки, а именно 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, 2, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$. Тъй като точките са 12 на брой, то трябва да се срещат всички шест дължини. Да допуснем, че исканото свързване е възможно. Да оцветим точките шахматно в черно и бяло – има 6 черни и 6 бели. Отсечките 1,$\sqrt{3}$,$\sqrt{5}$ свързват разноцветни точки – общо 3 черни и 3 бели. Отсечките с дължини $\sqrt{2}$,2,$\sqrt{6}$ свързват едноцветни точки, т.е. допринасят с четен брой черни и четен брой бели краища. Така общо се получават нечетен брой черни и нечетен брой бели краища, което е противоречие.

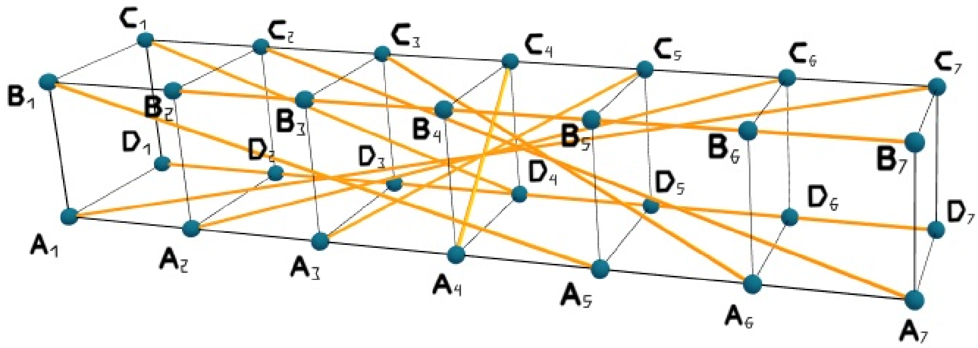




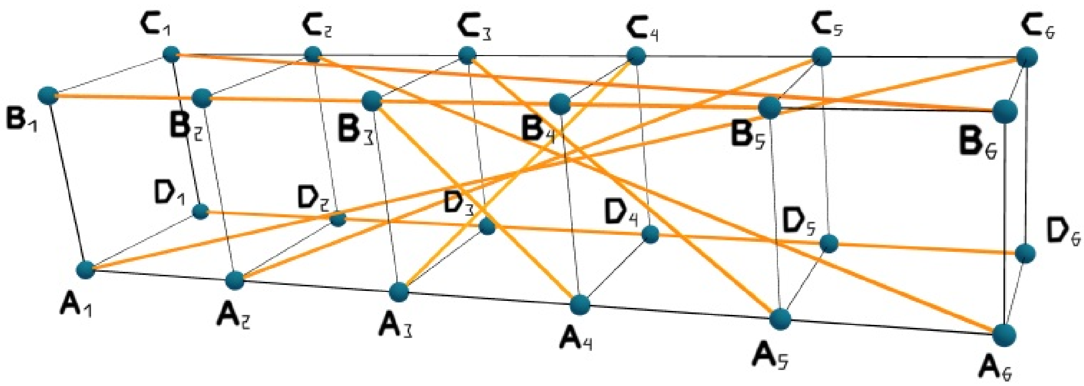
За $n \geq 3$ ще дадем пример. Да означим предните долни точки с $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$, предните горни – $B_1, B_2, \ldots, B_{n+1}$, задните горни – $C_1, C_2, \ldots, C_{n+1}$ и задните долни – $D_1, D_2, \ldots, D_{n+1}$, в този ред отляво надясно.

Нека $n = 2k$, $k \geq 2$, е четно. Построяваме отсечките A_1C_{2k+1}, $A_{2k+1}C_2$, A_2C_{2k}, $\ldots$, $A_{k+3}C_k$, A_kC_{k+2}, с дължини съответно $\sqrt{(2k)^2+2}$, $\sqrt{(2k-1)^2+2}$, $\ldots$, $\sqrt{2^2+2}$, отсечката $A_{k+1}C_{k+1}$ с дължина $\sqrt{2}$, отсечките D_1D_{2k+1}, D_2D_{2k}, $\ldots$, D_kD_{k+2}, с дължини $2k$, $2k-2$, $\ldots$, 2, отсечките B_2B_{2k+1}, B_3B_{2k}, $\ldots$, $B_{k+1}B_{k+2}$

с дължини $2k-1$, $2k-3$, $\ldots$, 1 и двете отсечки B_1A_{k+2} и C_1D_{k+1} с дължини $\sqrt{(k+1)^2+1}$ и $\sqrt{k^2+1}$.



Нека $n=2k-1$, $k\geq 2$, е нечетно. Построяваме отсечките A_1C_{2k}, $A_{2k}C_2$, A_2C_{2k-1}, $\ldots$, $A_{k+2}C_k$, A_kC_{k+1}, с дължини $\sqrt{(2k-1)^2+2}$, $\sqrt{(2k-2)^2+2}$, $\ldots$, $\sqrt{1^2+2}$, отсечките D_1D_{2k}, D_2D_{2k-1}, $\ldots$, D_kD_{k+1}, с дължини $2k-1$, $2k-3$, $\ldots$, 1, отсечките B_1B_{2k-1}, B_2B_{2k-2}, $\ldots$, $B_{k-1}B_{k+1}$ с дължини $2k-2$, $2k-4$, $\ldots$, 2 и двете отсечки B_kA_{k+1} и C_1B_{2k} с дължини $\sqrt{2}$ и $\sqrt{(2k-1)^2+1}$.



Коментар. След намиране на примери с $n=3,4,5,6$ задачата може да се реши и по индукция, като се добавят по две кубчета отляво и отдясно към редица от кубчета, при която вече е построено исканото свързване.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за отхвърляне на $n=1$, 2 т. за отхвърляне на $n=2$, 2 т. за конструкция при нечетно $n\geq 3$, 2 т. за конструкция при четно $n\geq 4$.