

Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

75. Национална Олимпиада по математика

Национален кръг, 9–12 клас

Първи ден, 4 Април 2026 г

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 1. Нека N е естествено число. Разполагаме с монети с номинали различни естествени числа a_1, a_2, \dots, a_N , като от номинал a_i има точно i монети за всяко $i = 1, 2, \dots, N$. Да се намери най-голямото естествено число S , в зависимост от N , за което съществуват числа a_1, a_2, \dots, a_N , такива че всяка сума от 1 до S включително може да се получи като сбор на една или повече от монетите.

Отговор. $(N + 1)! - 1$

Решение. (*Пример*) Да разгледаме $a_i = i!$ за $i = 1, 2, \dots, N$. Ще докажем с индукция по N , че всяка сума от 1 до $(N + 1)! - 1$ може да се получи. При $N = 1$ имаме само една монета с номинал $1 = (1 + 1)! - 1$. Да допуснем за N и да разгледаме число между 1 и $(N + 2)! - 1$ включително. Представяме го във вида $a(N + 1)! + b$ за цели $0 \leq a \leq N + 1$ и $0 \leq b \leq (N + 1)! - 1$. Първото събираемо представлява a монети от номинал $(N + 1)!$, които имаме в наличност, а второто събираемо е постижимо от индукционното допускане.

(*Оценка*) За монетите с номинал a_i има $i + 1$ възможности – да изберем $0, 1, 2, \dots, i - 1$ или i от тях. Оттук броят възможни суми (изключвайки тази с нито една монета) е не повече от $(N + 1)! - 1$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за деклариране на работещ пример, 2 т. за обосновка, че работи, 3 т. за оценка (от които 1 т. за отбелязване, че при образуване на сбор има $i + 1$ възможности за монетите с номинал a_i), 1 т. за отговор.

Задача 2. Дадено е естествено число $n \geq 2$ и реални числа a и b , такива че

$$a(b - 1)^n + b(a - 1)^n = 0.$$

Да се намери най-голямата възможна стойност на ab .

Решение. Ще докажем, че търсената стойност е равна на 1. Ако n е четно, то очевидно (1) $ab \leq 0$ или $a = b = 1$ и значи $ab \leq 1$. Нека $n \geq 3$ е нечетно и $ab > 0$. Тогава лесно се вижда, че $a, b > 0$.

За $f(x) = (x - 1)^n/x$ имаме, че (2) $f(x) > f(y)$ при $x > y > 0$, тъй като

$$(x - 1)^n > (y - 1)^n(x/y)^n > (y - 1)^n(x/y).$$

От друга страна, понеже $f(a) + f(b) = 0$ и

$$f(a) + f(1/a) = a^{1-n}(a - 1)^n(a^{n-2} - 1) \geq 0,$$

то (3) $f(b) \leq f(1/a)$. Тогава от (2) следва, че (4) $ab \leq 1$, като $ab = 1$ само при $a = b = 1$.

Оценяване. (7 точки) 1. за разглеждане на случая n четно, 3 т. за доказателство, че $f(x) = \frac{(x-1)^n}{x}$ е намаляваща в посочения интервал, 2 т. за $f(b) \leq f(\frac{1}{a})$ и 1 т. за довършване.

Задача 3. Нека $p > 2$ е просто число и $a > 1$ е естествено число. Да се намери остатъкът от деленето на числото $(a-1)(a^2-1)(a^3-1)\cdots(a^{p-1}-1)$ на $1+a+a^2+\cdots+a^{p-1}$.

Отговор. Остатъкът е p за всяко $a \in \mathbb{N}, a > 1$.

Решение. (*I начин*) Нека означим $P(x) = \prod_{i=1}^{p-1} (x^i - 1)$ и нека

$$P(x) = Q(x) \sum_{i=0}^{p-1} x^i + R(x) \quad (1),$$

където $R(x)$ е полином от степен $p-2$. Нека $\xi_i, i = 1, \dots, p-1$ са всички (комплексни) корени на полинома $U(x) := 1 + x + x^2 + \cdots + x^{p-1}$. За кое да е $1 \leq k \leq p-1$ да положим $x = \xi_k$ в (1). Получаваме,

$$P(\xi_k) = \prod_{i=1}^{p-1} (1 - \xi_k^i) = \prod_{i=1}^{p-1} (1 - \xi_i) = R(\xi_k).$$

Да забележим, че $\prod_{i=1}^{p-1} (1 - \xi_i) = U(1)$, което дава $R(\xi_k) = U(1) = p$ за $k = 1, 2, \dots, p-1$. Тъй като $R(x)$ е от степен $p-2$, то $R(x)$ съвпада с константата p .

(*II начин*) Ще докажем следната

Лема.

$$\prod_{\gcd(d,m)=1, 1 \leq d < m} (X - Y^d) \equiv \Phi_m(X) \pmod{\Phi_m(Y)}$$

Доказателство. Нека

$$P(X, Y) = \prod_{\gcd(d,m)=1, 1 \leq d < m} (X - Y^d).$$

Тогава

$$P(X, Y) = \Phi_m(X) + P_0(Y) + XP_1(Y) + \cdots + X^d P_d(Y),$$

където P_i е полином с цели коефициенти. Нека $z_i, i = 1, 2, \dots, \varphi(m)$ са всички примитивни m -ти корени на 1. Тогава полинома $P(X, z_i) - \Phi_m(X)$ е тъждествено 0. Следователно, $P_j(z_i) = 0$, за всички $1 \leq j \leq d, 1 \leq i \leq \varphi(m)$. Т.е. $\Phi_m(Y)$ дели $P_j(Y), j = 1, 2, \dots, d$, което завършва доказателството. \square

Нека сега $m = p$ е просто число. Имаме

$$(X - Y)(X - Y^2) \cdots (X - Y^{p-1}) \equiv \frac{X^p - 1}{X - 1} \pmod{\frac{Y^p - 1}{Y - 1}}.$$

Като положим $(x, y) = (1, a)$ получаваме

$$(a - 1) \cdots (a^p - 1) \equiv p \pmod{\frac{a^p - 1}{a - 1}}.$$

Оценяване. (7 точки) (*I начин*) 2 т. за $P(\xi_k) = R(\xi_k)$; 3 т. за $R(\xi_k) = U(1)$; 2 т. за довършване (*II начин*) 5 т. за лемата; 2 т. за довършване.