Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

75. Национална олимпиада по математика

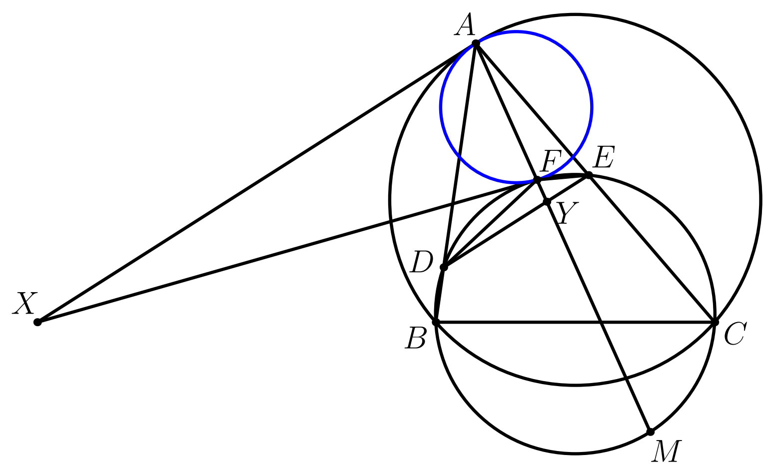
Национален кръг, 9–12 клас

Втори ден, 5 Април 2026 г

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

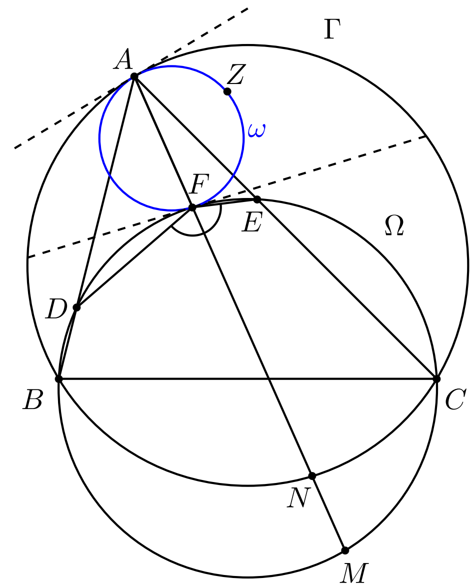
Задача 4. Даден е $\triangle ABC$ с описана около него окръжност Γ. Окръжност Ω през върховете B и C пресича отсечките AB и AC в точки D и E съответно. Върху малката дъга $\overset{\frown}{DE}$ от Ω е избрана точка F. Нека ω е окръжността, която минава през A и F и се допира до Ω. Да се докаже, че ω се допира до Γ тогава и само тогава, когато правата AF е ъглополовяща на $\sphericalangle DFE$.

Решение. (*I начин*) Нека X е пресечната точка на допирателната в F към Ω и допирателната в A към Γ. Нека AF пресича Ω за втори път в M и $Y = DE \cap AF$. Можем да видим, че $\sphericalangle XAD = \sphericalangle BCA = \sphericalangle EDA$, тоест $AX \parallel DE$.



Посока 1: Нека ω се допира до Γ. Щом XA и XF са допирателните, то $\sphericalangle XAF = \sphericalangle XFA$. Можем да видим, че $\sphericalangle XAF = \sphericalangle DYM = \sphericalangle YDF + \sphericalangle DFM$. Освен това $\sphericalangle XFA = 180 - \sphericalangle XFM = \sphericalangle MDF = \sphericalangle YDF + \sphericalangle MFE$ от което следва, че $\sphericalangle DFM = \sphericalangle MFE$ с което сме готови.
Посока 2: Нека AF е ъглополовяща на $\sphericalangle EDF$. То $\sphericalangle XAF = \sphericalangle DYM = \sphericalangle FDY + \sphericalangle YDM = 180 - \sphericalangle FEM = 180 - \sphericalangle XFM = \sphericalangle XFA$. Щом $\sphericalangle XAF = \sphericalangle XFA$ следва, че XA е допирателна към ω, обаче тя е допирателна и към Γ, следователно двете окръжности се допират в A.

(*II начин*) Нека правата AF пресича за втори път Ω и Γ в точките M и N съответно, а точка $Z \in \overset{\frown}{AF}$ както е показано на чертежа. Окръжността ω се допира до Γ тогава и само тогава, когато $\overset{\frown}{ACN} = \overset{\frown}{AZF}$. Тъй като ω и Ω имат обща вътрешна допирателна, то $\overset{\frown}{AZF} = \overset{\frown}{FDM}$. От друга страна,



$$\overset{\frown}{ACN} = \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CN} = 2\sphericalangle ABC + 2\sphericalangle CAN$$

$$= \overset{\frown}{DFC} + \overset{\frown}{MC} - \overset{\frown}{FE} = \overset{\frown}{DF} + \overset{\frown}{ECM}.$$

Следователно условието е еквивалентно на $\overset{\frown}{DF} + \overset{\frown}{ECM} = \overset{\frown}{FDM}$, т.е. $\overset{\frown}{ECM} = \overset{\frown}{DBM}$ или AF да е ъглополовяща на $\sphericalangle DFE$.

(*III начин*) Да разгледаме инверсия с център A и радиус $\sqrt{AD \cdot AB} = \sqrt{AE \cdot AC}$. При тази инверсия можем да видим, че Ω се запазва. B и D се разменят, E и C се разменят. Освен това F отива в $M = AF \cap \Omega$. Γ трябва да отиде в права през образите на B и C, тоест отива в DE. ω отива в допирателната към Ω през M. Искаме да докажем, че DE е успоредна на допирателната през M към Ω тогава и само тогава когато AF е ъглополовяща, което е същото като M да е среда на дъгата, и твърдението следва.

Оценяване. (7 точки) (*I начин*) 1 т. за дефиниране на точка X и $DE \parallel AX$; 3 т. за посока 1; 3 т. за посока 2. (*II начин*) 2 т. за свеждане на задачата до равенство на дъги от Γ или Ω като $\overset{\frown}{ACN} = \overset{\frown}{FDM}$; 3 т. за изразяване на тези дъги чрез дъги само в Ω; 2 т. за довършване. (*III начин*) 1 т. за разглеждане на инверсия с център A и радиус $\sqrt{AD \cdot AB}$; 3 точки за намиране образите на дефинираните точки и окръжности; 2 точки за преформулиране на задачата спрямо новата конфигурация; 1 т. за довършване.

Задача 5. Нека $1 \le a_1 < a_2 < \cdots$ е безкрайна редица от естествени числа. Известно е, че съществува число $m > 0$, такова че $a_{i+1} - a_i < m$ за всяко $i \in \mathbb{N}$. Да се докаже, че съществуват две по две различни естествени числа p, q, r, s, такива че $a_p a_q = a_r a_s$.

Решение. (*I начин*) От условието следва, че $a_n < a_1 + (n-1)m$ за всяко $n = 2, 3, \ldots$. Нека M е „голямо“ естествено число и да разгледаме двойките (k, l), такива че $0 < k < l$ и $k.l \leqq M^4$. Имаме

$$a_k.a_l < (a_1 + km)(a_1 + lm) = a_1^2 + a_1 m(k+l) + klm^2 < kl(a_1^2 + 2a_1 m + m^2) < C.M^4,$$

където C е константа, т.е. $a_k.a_l \in [1, C.M^4]$.

Да оценим двойките (k, l): за всяко $k = 1, 2, \ldots, M$, $l = k+1, k+2, \ldots, \dfrac{M^4}{k}$ и възможностите за l са поне $\dfrac{M^4}{k} - k > \dfrac{M^4}{2k}$. Като сумираме по $k = 1, 2, \ldots, M$ получаваме поне $\dfrac{M^4}{2}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{M}\right)$ двойки. Избираме сега M така, че $1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{M} > 4C$. Тогава в интервала $[1, C.M^4]$ имаме повече от $2C.M^4$ значения на произведенията, които са цели числа и от принципа на Дирихле следва исканото.

(*II начин*) Да фиксираме естественото число N. За кой да е индекс $k \in \mathbb{N}$ да означим

$$A(a_k) := \{x \in \mathbb{N} : x \leq N, \exists i \in \mathbb{N}, i \neq k, a_k a_i = x\}.$$

Очевидно

$$|A(a_k)| = \left|\left\{a_i : i \neq k, a_i \leq \left\lfloor \frac{N}{a_k} \right\rfloor\right\}\right| \geq \left|\left\{a_i : a_i \leq \frac{N}{a_k} - 1\right\}\right| - 1.$$

Тъй като във всеки интервал, с дължина m и надясно от a_1, има член на редицата то

$$|A(a_k)| \geq \frac{N/a_k - 1 - a_1}{m} - 1 - 1 \geq \frac{N}{ma_k} - 3 - \frac{a_1}{m} = \frac{N}{ma_k} - C,$$

където сме означили $C = 3 + \dfrac{a_1}{m}$. Имаме

$$\begin{aligned} \sum_{a_k \leq N} |A(a_k)| &\geq \frac{N}{m} \sum_{a_k \leq N} \frac{1}{a_k} - C|\{a_k : a_k \leq N\}| \\ &\geq \frac{N}{m} \sum_{i \leq N/m} \frac{1}{mi} - CN \\ &= \frac{N}{m^2} \sum_{i \leq N/m} \frac{1}{i} - CN. \end{aligned}$$

Тъй като редът $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ е разходящ, то за достатъчно големи N е изпълнено

$$\sum_{a_k \leq N} |A(a_k)| > 2N.$$

Това означава, че съществуват различни r, s, t такива че $A(a_r) \cap A(a_s) \cap A(a_t) \neq \emptyset$ откъдето съществуват различни r', s', t', с $r' \neq r$, $s' \neq s$, $t' \neq t$

$$a_r a_{r'} = a_s a_{s'} = a_t a_{t'}.$$

От тук се вижда, че две от трите двойки $\{r, r'\}$, $\{s, s'\}$, $\{t, t'\}$ са две по две различни.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за идея (експлицитно) за оценка от долу на броя произведения по-малки от N; 4 т. за получаване на подходяща оценка. 1 т. за довършване.

Задача 6. В страната на барон Мюнхаузен има 2^n града, номерирани с числата от 0 до $2^n - 1, n \in \mathbb{N}$. Два града, номерирани съответно с числата a и b, се наричат *приятелски*, ако в двоичния си запис числата a и b се различават точно в една цифра (например за $n = 3$, градове с номера 0 и 4 са приятелски, както и тези с номера 5 и 7).

Между всеки два приятелски града са прекарани две еднопосочни шосета – в едната и в другата посока. Всяко шосе има категория, която е цяло число от 1 до n. Като пътувал из страната, барон Мюнхаузен забелязал следното:

(1) За всеки град категориите на изходящите от него шосета са различни;

(2) За всеки град всички входящи в него шосета имат една и съща категория.

Да се намерят всички n, за които това е възможно.

Отговор. $n = 2^k, k \in \mathbb{N}$.

Решение. (*I начин*) Да означим с X_n множеството на градовете. Гледаме на X_n като на двоични низове с дължина n. За два двоични низа $x, y \in X_n$, означаваме с xy конкатенацията на x и y. И така $xy \in X_{2n}$. Конфигурацията представяме като насочен граф с върхове в X_n, като x и y с са свързани с насочено ребро (x, y), ако се различават само в един бит. Забележете, че всеки връх е инцидентен с n изходящи и n входящи ребра. Да означим този граф с $G_n(X_n, E_n)$. Всяко насочено ребро $(x, y) \in E_n$ има етикет $f(x, y) \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Искаме да намерим такова етикиране на ребрата в G_n, така че за всеки връх всички входящи ребра да имат един и същ етикет, а всички изходящи ребра да са с различен етикет (числата от 1 до n). Тъй като всички изходящи ребра имат различен етикет, то броят на ребрата етикирани с всяко от числата 1 до n е един и същ. Това означава, че за всяко $i = 1, 2, \ldots, n$, броят на върховете, в които влизат ребра етикирани с i е един и същ. От тук $n \mid |X_n|$, т.е. $n \mid 2^n$, откъдето n е степен на 2,

Сега ще докажем по индукция по k, че за всяко $n = 2^k$ такова етикиране е възможно. За $k = 1$ се проверява директно.

Нека $k > 1$ и сме доказали твърдението за $k - 1$. И така за $n = 2^{k-1}$ имаме налице етикиране на ребрата на графа G_n съгласно изискванията. Да разгледаме графа G_{2n}. Всеки негов връх $z \in X_{2n}$ представяме като $z = x_1y_1x_2y_2 \ldots x_ny_n$, където $x_i, y_i \in \{0, 1\}, 1 \leq i \leq n$. Върху X_2 дефинираме функцията t (*тип*), вземаща стойности 0 или 1 така: $t(00) = t(01) :=$ 0, $t(10) = t(11) := 1$. За $z \in X_{2n}, n \geq 2$ дефинираме $t(z)$ така:

$$t(z) := \sum_{i=1}^{n} t(x_iy_i) \,(\mathrm{mod}\ 2)\,.$$

Нека z, z' са съседни върхове в G_{2n}. Да разгледаме $u = (u_i)_{i=1}^n$, $u_i := x_i + y_i \,(\mathrm{mod}\ 2)$ и $u' = (u'_i)_{i=1}^n$, $u'_i := x'_i + y'_i \,(\mathrm{mod}\ 2)$. Ясно е, че u и u' са съседни върхове в X_n. Дефинираме $f(z, z')$ както следва:

$$f(z, z') := \begin{cases} f'(u, u') & \text{ако } t(z') = 0 \\ f'(u, u') + n & \text{ако } t(z') = 1. \end{cases}$$

От дефиницията на f и от индукционната хипотеза е ясно, че при фиксирано z', етикета $f(z, z')$ е един и същ за всяко z съседно на z'. Нека сега $z = (x_1y_1x_2y_2 \ldots x_ny_n)$ е фиксирано и да разгледаме всички $z' = (x'_1y'_1 \ldots x'_ny'_n)$ съседни на z. Да забележим, че ако z'_1 и z'_2 се различават от z само съответно в битовете x_i и y_i, то имаме $u'_1 = u'_2$, но $t(z'_1) \neq t(z'_2)$. Това означава, че $f(z, z'_1) = f'(u, u') + \varepsilon n$, $f(z, z'_2) = f'(u, u') + (1 - \varepsilon)n$, където $\varepsilon \in \{0, 1\}$. Това, заедно с индукционната хипотеза, показват, че когато z' пробягва всички съседни на z двоични низове, $f(z, z')$ ще пробягва всички числа от 1 до $2n$. Следователно f удовлетворява всички изисквания.

(*II начин*) Бинарната операция XOR или *изключващо или* за две числа $a, b \in \{0, 1\}$ се дефинира по следния начин:

a	b	$a \,\mathrm{XOR}\, b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Ще дефинираме и операцията $a \oplus b$ (*побитово изключващо или*) за две цели неотрицателни числа $a, b \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, такива че $a, b < 2^{t+1}$, $a = \sum_{i=0}^{t} 2^i x_i$, $b = \sum_{i=0}^{t} 2^i y_i$, където $x_i, y_i \in \{0, 1\}$ като

$$a \oplus b = \sum_{i=0}^{t} 2^i (x_i \,\mathrm{XOR}\, y_i).$$

Тоест резултатът от побитовото изключващо или се получава при последователно прилагане на изключващо или върху съответните битове на a и b (т.е. съответните цифри в двоичното им представяне). Така $a \oplus b$ има стойност 1 на даден бит тогава и само тогава, когато a и b се различават в този бит. Побитовото изключващо или е асоциативно, комутативно и има еднозначен обратен елемент за всяко a: $a \oplus b = 0 \iff a = b$. Допълнително, за $0 \leq a, b < 2^t$ винаги е изпълнено $0 \leq a \oplus b < 2^t$. Така можем еднозначно да дефинираме побитовото изключващо или на редица $(a_i)_{i=1}^{m}$ да е равно на 0 за $m = 0$ и за $m \geq 1$ да бъде:

$$\oplus_{i=1}^{m} a_i = \left(\oplus_{i=1}^{m-1} a_i\right) \oplus a_m.$$

Ще разгледаме задачата в еквивалентна постановка, като ще съпоставим един и същ цвят на всички ребра от една и съща категория в графа X_n, дефиниран от пътната мрежа в страната. Нека c_u е цветът на всички входящи ребра във връх u.

Лема. Съществува оцветяване на ребрата в X_n, изпълняващо условието, тогава и само тогава, когато съществува редица $(c_i)_{i=0}^{2^n-1}$, за която $c_u \neq c_v$ за всички $0 \leq u, v < 2^n$, такива че u и v се различават в 2 бита, като $(c_i)_i$ се състои от най-много n различни стойности.

Доказателство. ($\rightarrow$) Нека два върха u и v се различават в битове с номера x и y. Тогава $u = v \oplus 2^x \oplus 2^y$ и за $w = u \oplus 2^x$ двойките (w, u) и (w, v) се различават в един бит. Следователно, по условие, изходящите ребра от w към двата върха трябва да бъдат с различни цветове, откъдето $c_u \neq c_v$. По условие, $(c_i)_i$ ще има най-много n различни стойности.

($\leftarrow$) Оцветяваме входящите ребра в X_n спрямо $(c_i)_i$. Тогава условието за входящите ребра е изпълнено. Нека разгледаме двойка различни изходящи ребра от w, съответно към u и v ($u \neq v$). Тогава $u = w \oplus 2^x$ и $v = w \oplus 2^y$ за $x \neq y$. Следователно $u \oplus v = 2^x \oplus 2^y$, откъдето те се различават в точно 2 бита. Така $c_u \neq c_v$. Тъй като $(c_i)_i$ има най-много n различни стойности, можем да построим граф X_n с n категории. $\square$

Така нека дефинираме графа G_n, който има ребро между $u, v \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$ тогава и само тогава, когато u и v се различават в 2 бита. От горното твърдение следва, че съществува конструкция за X_n тогава и само тогава, когато G_n има n-оцветяване.

Нека $n = 2^k$ за $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$. Тогава нека дефинираме цвят на u:

$$c_u = \oplus_{i=0}^{m-1} a_i \quad \text{за} \quad u = \sum_{i=0}^{m-1} 2^{a_i}, \quad \text{при} \quad 0 \leq a_0 < a_1 < \cdots < a_{m-1} < n.$$

Тоест c_u е равно на побитовото изключващо или на номерата на позициите на единиците в двоичното представяне на u. От свойствата на $\oplus$, тъй като $0 \leq u < 2^n = 2^{2^k}$, то $2^{a_i} < 2^n$, откъдето $0 \leq c_u < n = 2^k$. Нека разгледаме двойка върхове (u, v), различаващи се в два бита, тогава:

$$
\begin{aligned}
&u = v \oplus 2^x \oplus 2^y, \quad x \neq y,\\
&c_u = c_v \oplus x \oplus y, \quad (\text{по деф. на } c_w)\\
&c_u \oplus c_v = x \oplus y,\\
&x \oplus y \neq 0 \quad (\text{тъй като } x \neq y),\\
&c_u \oplus c_v \neq 0,\\
&c_u \neq c_v.
\end{aligned}
$$

Оттук следва конструкция за всяко n, равно на степен на двойката, тоест за всяко n, което дели 2^n.

Сега ще докажем, че ако G_n може да се оцвети в n цвята, то $n \mid 2^n$. Нека за коректно оцветяване $(c_i)_i$ дефинираме t_i да бъде равно на броя върхове u, такива че $c_u = i$. Ще преброим тези върхове по още един начин – всеки връх u в G_n е от степен равна на $\binom{n}{2}$ (избираме кои два бита да са различни в даден съсед). Съседите на u са оцветени в $n-1$ различни цвята, поради $c_u \neq c_v$.

Нека допуснем, че съществува цвят, за който има повече от $\frac{n}{2}$ съседи на u, които са оцветени в него. Тогава нека тези върхове са $v_1, v_2, \ldots, v_m$ и v_i се различава в битовете a_i и b_i, тоест $v_i = u \oplus 2^{a_i} \oplus 2^{b_i}$, $a_i \neq b_i$. Тогава, тъй като $m > \frac{n}{2}$, по принципа на Дирихле ще има двойка върхове (v_i, v_j), за които поне едно от равенствата $a_i = a_j$, $a_i = b_j$, $b_i = a_j$ или $b_i = b_j$ е изпълнено. Нека без ограничение на общността това равенство да е $a_i = a_j$. Изпълнено е точно едно равенство, защото в противен случай $v_i = v_j$. Тогава $v_i \oplus v_j = 2^{b_i} \oplus 2^{b_j}$ $(b_i \neq b_j)$, следователно има ребро между v_i и v_j и $c_{v_i} = c_{v_j}$, което е противоречие.

Тогава, тъй като броят цветове е $n-1$ и $(n-1)\frac{n}{2} = \binom{n}{2}$, то трябва от всеки цвят i да има точно $\frac{n}{2}$ съседи, оцветени в него. Ако преброим за определен цвят i броя ребра между връх от цвят i и връх от друг цвят, ще преброим всеки връх от цвят i по $\binom{n}{2}$ пъти – по веднъж за всеки съсед. Тогава:

$$
(2^n - t_i)\frac{n}{2} = \binom{n}{2} t_i \iff \frac{2^n}{n} = t_i.
$$

Оттук, тъй като t_i е цяло число, следва, че $n \mid 2^n$ за всяка валидна конструкция.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за доказване, че n трябва да е степен на 2; 5 т. за конструиране на пример, показващ, че е възможно за $n = 2^k$.